VŠB TECHNICKÁ UNIVERZITA OSTRAVA
FAKULTA ELEKTROTECHNIKY A INFORMATIKY

Ohodnocení grafů a rozpisy

Graph labeling and scheduling

Bc. Kateřina Polochová

Diplomová práce

Vedoucí práce: doc. Mgr. Petr Kovář, Ph.D.

Ostrava, 2021

Abstrakt

Jelikož lidé jsou odjakživa soutěživí, vždy se budou pořádat závody a turnaje. Turnaj si můžeme znázornit jednoduchým grafem, kde vrcholy jsou účastníci turnaje a hrany jsou zápasy mezi účastníky turnaje. Pro uspořádání turnaje budeme po grafu, který jej znázorňuje, požadovat určité vlastnosti. V této práci se budeme zabývat sestavením turaje za pomoci vrcholového ohodnocení, které budeme modelovat s požadavkem na celkový součet sil, převážně pro tzv. neúplné turnaje, kdy nehraje každý tým s každým týmem.

Pro sestavení ohodnocení přiřadíme každému týmu nějakou sílu (například podle umístění v předchozím turnaji) a následně budeme počítat celkovou váhu soupeře pro každého účastníka turnaje, tedy součet labelů sousedů pro každý z vrcholů.

V práci je zavedeno nové aritmetické ohodnocení grafu, které je zobecněním distančně magického ohodnocení, fair ohodnocení a handicapového ohodnocení. Ukážeme, že se jedná o zobrazení ekvivalentní handicapovému ohodnocení pro pravidelné grafy. Existence tohoto nového aritmetického ohodnocení je vyřešena pro pravidelné grafy, jejichž stupeň vrcholu je $d = 1$ nebo $d = 2$. V práci jsou také nutné podmínky existence pro aritmetické ohodnocení pravidelných grafů.

Klíčová slova

Turnaje; Aritmetické ohodnocení grafů; Nutné podmínky; Vrcholové ohodnocení grafů

Abstract

We will always have tournaments, because people want to know, who is better in games or sports. We aproximate a tournament with a simple graph, where teams will be vertices and a match between two teams in the tournament will be represented by an edge. Every graph, which aproximates a tournament, has to meet certain properties. In this thesis we describe tournaments with a vertex graph labeling, which aproximate total strength of the opponents of each team predominantly in equalized incomplete tournaments.

We assign strength to every team (i.e. by their placement in the previsious tournament) and count the weight of all opponents for each team as the sum of labels of vertices adjacent to the corresponding vertex.

In this thesis we create a new arithmetric labeling of graphs, which is a generalization of distance magic labeling, fair labeling and handicap labeling. We show that this labeling is equivalent to handicap labeling for regular graphs. Existence of this new labeling is settled for r-regular graphs, where $r = 1$ or $r = 2$. Further this thesis provides necessary conditions for the existence of arithmetic graph labeling.

Keywords

Tournaments; Arithmetic graph labeling; Necessary conditions; Vertex graph labeling

Poděkování

Děkuji svému vedoucímu práce doc. Mgr. Petru Kovářovi, Ph.D. za odborné vedení, cenné podněty, inspiraci a připomínky v průběhu zpracování práce.

Dále bych chtěla poděkovat rodině a partnerovi za psychickou a morální podporu během celého studia.

Obsah

Seznam použitých symbolů a zkratek **7**

Seznam obrázků **8**

1 Úvod **10**

2 Základní pojmy **12**

2.1 Názvy ohodnocení 16

3 Známé výsledky **18**

3.1 Distančně magické ohodnocení 18

3.2 Ohodnocení Degree distance magic 21

3.3 Antimagická ohodnocení 21

4 Aritmetická ohodnocení **24**

4.1 Ohodnocení Hela 24

4.2 Ohodnocení Thor 25

4.3 Ohodnocení Freya 25

5 Ohodnocení Loki **27**

5.1 Speciální případy 29

5.2 Pravidelné grafy, kde d=1 29

5.3 Pravidelné grafy, kde d=2 32

5.4 Pravidelné grafy, kde d=3 35

5.5 Možné varianty konstanty b pro pravidelné grafy 36

5.6 Existence grafů v závislosti na paritě parametrů 51

6 Turnaje a jejich souvislost s Loki ohodnocením **55**

7 Závěr **57**

Literatura 59

Přílohy 61

A Excelovská tabulka 61

Seznam použitých zkratek a symbolů

$w(v)$	–	Váha vrcholu v
d	–	Stupeň vrcholu pravidelného grafu
G, $G = (V, E)$	–	Graf
n	–	Počet vrcholů
$\varphi(v)$	–	Ohodnocení vrcholu v
k	–	Diference handicapového ohodnocení

Seznam obrázků

2.1 Obecný graf na 5 vrcholech . . . 12
2.2 Graf se smyčkou . . . 13
2.3 Multigraf . . . 13
2.4 Nepravidelný graf . . . 14
2.5 Cyklus na 5 vrcholech - C_5 . . . 14
2.6 Kompletní graf na 6 vrcholech - K_6 . . . 15
2.7 Nesouvislý graf se dvěma komponentami . . . 15
2.8 Dobré vrcholové barvení . . . 16
2.9 Vrcholové barvení, které není dobré . . . 16
2.10 Bipartitní graf . . . 17

5.1 $K_{4,2}$ s Loki ohodnocením . . . 28
5.2 K_2 s Loki ohodnocením . . . 30
5.3 Dvě kopie K_2 s Loki ohodnocením . . . 31
5.4 Graf, kde $n = 8$ a $d = 3$ s Loki (Freya) ohodnocením . . . 36
5.5 Graf, kde $n = 16$ a $d = 3$ s Loki (Freya) ohodnocením . . . 37
5.6 2-fair graf, kde $n = 9$ a $d = 4$ . . . 44
5.7 1-handicapové ohodnocení grafu s 9 vrcholy stupně 4 . . . 47
5.8 1-handicapové ohodnocení grafu s 12 vrcholy stupně 5 . . . 47
5.9 1-handicapové ohodnocení grafu s 12 vrcholy stupně 7 . . . 48
5.10 1-handicapové ohodnocení grafu s 13 vrcholy stupně 6 . . . 48
5.11 1-handicapové ohodnocení grafu s 14 vrcholy stupně 7 . . . 48
5.12 2-handicapové ohodnocení grafu s 13 vrcholy stupně 6 . . . 49
5.13 2-handicapové ohodnocení grafu s 14 vrcholy stupně 6 . . . 49
5.14 3-handicapové ohodnocení grafu s 15 vrcholy stupně 6 . . . 49
5.15 4-handicapové ohodnocení grafu s 19 vrcholy stupně 8 . . . 50

6.1 Graf možných zápasů pro 8 týmů, kde každý hraje 3 zápasy s fair ohodnocením . . . 56

6.2 Graf možných zápasů pro 8 týmů, kde každý hraje 3 zápasy s handicapovým ohodnocením . . . 56

Kapitola 1

Úvod

Když pracujeme s grafy, může se stát, že potřebujeme, aby jejich vrcholy měly přiřazenou nějakou speciální hodnotu. Pokud budeme sestavovat graf v souvislosti s turnajem, pak bude rozdíl, pokud nejprve proběhne turnaj a graf vznikne na základě jeho výsledků (orientovaný graf zaznamenávající výhry a prohry), nebo naplánujeme turnaj na základě sestaveného grafu. Například pokud budeme pořádat větší turnaj, nemusíme mít čas, abychom stihli odehrát všechny zápasy, ale zároveň nechceme libovolný tým poškodit tím, že by měl soutěž těžší než jiné týmy. Z turnaje vytvoříme graf takovým způsobem, že vrcholy budou jednotlivé týmy a hrany grafu budou symbolizovat jednotlivé zápasy mezi týmy.

V tomto případě se nám hodí přiřadit jednotlivým vrcholům grafu nějaké hodnoty, zvané labely. V turnajích jistě budeme chtít, aby všechny týmy odehrály stejný počet zápasů, graf reprezentující turnaj bude proto pravidelný.

Mějme n různých týmů, které budou odpovídat vrcholům v grafu G. Máme uspořádat spravedlivý turnaj, ale není možné stihnout zahrát zápasy mezi všemi týmy (každý s každým). Máme umístění těchto týmu z předchozího roku, označíme je jako $\varphi(v_i)$, kde v_i jsou jednotlivé týmy. Pro nejlepší tým bude $\varphi(v_n) = n$, pro nejhorší tým bude $\varphi(v_1) = 1$. Hodnoty vrcholů se budou navyšovat o 1, pro každý vrchol, tzn. $\varphi(v_1) = \varphi(v_2) - 1 = \varphi(v_n) - (n-1)$. Také chceme, aby všechny týmy odehrály stejný počet zápasů, jedná se tedy o pravidelný graf, kde d je stejná konstanta pro každý vrchol grafu. Tento popis se dá například najít v [1].

Navazujeme na známé výsledky. Označme $w(i)$ váhu vrcholu i. Váhu vrcholu $w(i)$ získáme tak, že sečteme labely všech sousedních vrcholů. To znamená, že jsme schopni spočítat, jaká bude celková váha pro všechny vrcholy grafu. Pro pravidelné grafy je $d(v_i)$ konstantní, a tedy $d(v_i) = d$. A tedy platí, že $\sum_{i=1}^{n} w(v_i) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{x \in N(v_i)} \varphi(v_i) = \sum_{i=1}^{n} d\varphi(v_i) = d\frac{n(n+1)}{2}$. Váha vrcholu nám bude značit obtížnost turnaje pro jednotlivé týmy. Budeme chtít, aby $w(i)$ a $w(i+1)$ bylo konstantní pro všechna i. Například u handicapového ohodnocení má vrchol s o jedničku vyšším labelem o jedničku vyšší váhu.

Jsme schopni spočítat, jaká je hodnota váhy pro vrchol s labelem 1, a tedy jaká je nejmenší váha pro vrcholy v grafu, který má mít rozdíl vah mezi dvěma vrcholy s o jedničku vyšším labelem 1 popřípadě 0. Pokud bude váha všech vrcholů stejná, pak spočítáme váhu mezi vrcholy ze vztahu $w(i) = \frac{d \cdot (n+1)}{2}$. Pokud bude váha vrcholů různá, ale pro vrcholy sousedních labelů se bude lišit o 1, získáme váhu pro nejnižší vrchol ze vztahu $w(1) = \frac{dc \cdot (n+1) - n + 1}{2}$. Tento vztah nám může pomoci, pokud se budeme snažit nalézt graf „hrubou silou“, protože nám eliminuje některé možnosti pro spoje mezi vrcholy.

Nyní se blíže podíváme na některá ohodnocení grafů, která budou všechna záviset na počtu hran, jenž daný vrchol bude mít a také na labelu jednotlivých vrcholů. Když se na jednotlivé návrhy následujících ohodnocení podíváme blíže, můžeme si povšimnout, že jednotlivá ohodnocení jsou speciálními případy jiných. Jednotlivá známá ohodnocení se snažíme zobecnit, například handicapové, distančně magické atd.

Kapitola 2

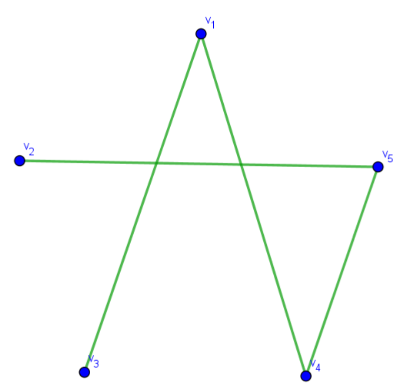
Základní pojmy

V této kapitole shrneme přehled základních pojmů, které budou v práci využívány. Definice těchto pojmů můžeme nalézt například v knize Introduction to graph theory [11], nebo ve skriptech [12] sepsaných pro předmět Teorie grafů, který je vyučován na VŠB-TUO.

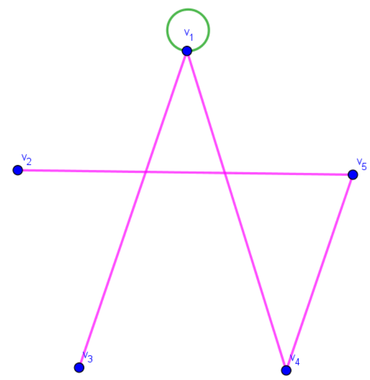
Začneme pojmem, který budeme užívat nejčastěji. Pokud budeme mluvit o grafu, pak máme na mysli jednoduchý graf (příklad jednoduchého grafu na 5 vrcholech můžeme vidět na obrázku 2.1). Nyní jej definujeme. Graf G tvoří uspořádaná dvojice vrcholů a hran. Množina vrcholů grafu G je značena V a jedná se o neprázdnou konečnou množinu. Množina hran grafu G je značena E a jedná se o množinu dvouprvkových podmnožin množiny vrcholů V. Graf také často zobrazujeme v grafické formě, kdy vrcholy jsou znázorněna body a hrany jsou znázorněny jako křivky spojující tyto body.

Podle definice v úvahu nebereme graf se smyčkou (smyčkou se myslí taková hrana, která vede z libovolného vrcholu v_i a končí ve stejném vrcholu v_i, tedy má hranu sám se sebou). Graf se smyčkou můžeme vidět na obrázku 2.2, kde je smyčka obarvená zelenou barvou.

Pojmem graf také nebudeme myslet multigraf (multigraf je takový graf, kdy mezi některými

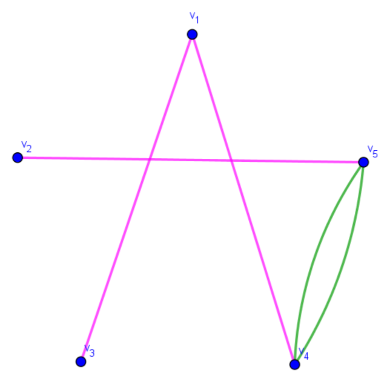


Obrázek 2.1: Obecný graf na 5 vrcholech



Obrázek 2.2: Graf se smyčkou

dvěma různými vrcholy vede více než jedna hrana). Příklad multigrafu je na obrázku 2.3, kde je zdvojená hrana označena zelenou barvou.

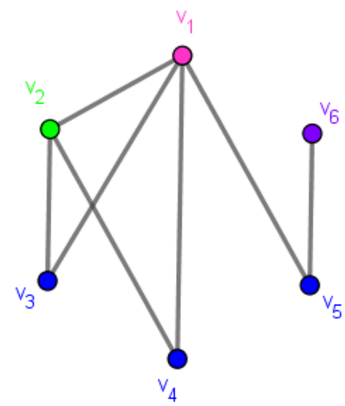


Obrázek 2.3: Multigraf

Pro definici některých pojmů budeme potřebovat definovat sled. Sled je taková posloupnost vrcholů a hran $(v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, ..., e_n, v_n)$ v grafu G , že hrana e_i má koncové vrcholy v_{i-1} a v_i pro všechna $i = 1, 2, 3, ..., n$. Sled $(v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, ..., e_n, v_n)$ se nazývá (v_0,v_n)-sled.

Nyní definujeme stupeň vrcholu. Stupeň vrcholu v je počet incidentních hran s vrcholem v a značíme jej $deg(v)$. Pokud všechny stupně grafu jsou si rovny, tedy $deg(v_1) = deg(v_2) = ... = deg(v_n)$, pak se jedná o pravidelný graf a stupeň vrcholu budeme označovat d. Obecně symbolem δ označujeme v grafech nejnižší stupeň vrcholu a Δ nejvyšší stupeň vrcholu. V pravidelném grafu platí $\delta = \Delta = d$. Jako ukázku pro pravidelný graf využijeme cyklus C_5 z obrázku 2.5, kde $d = 2$. Na obrázku 2.4 je růžovou barvou zvýrazněn vrchol stupně 4, zelenou barvou je zvýrazněn vrchol stupně 3, modrou barvou jsou zvýrazněny vrcholy stupně 2 a vrchol v_6, který je fialový, má stupeň jedna. V tomto grafu je $\delta = 1$ a $\Delta = 4$.

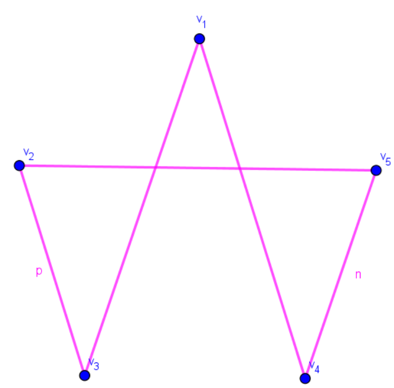
Graf G nazveme souvislým právě tehdy, pokud mezi libovolnými dvěma vrcholy v_i a v_j $(i, j \in \mathbb{N},$



Obrázek 2.4: Nepravidelný graf

$i = 1, 2, ..., n$ a $j = 1, ..., n$) bude existovat (v_i,v_j)-sled. Pokud graf G není souvislý, nazveme jej nesouvislým. Příklad souvislého grafu je například na obrázku 2.1 a příklad nesouviského grafu je na obrázku 2.7. Komponentou grafu nazveme každý maximální souvislý podgraf v grafu.

Dále zavedeme pojem cyklus. Cyklem myslíme souvislý 2-pravidelný graf, tedy z každého vrcholu vedou právě dvě hrany. Cyklus na n vrcholech značíme C_n a ukázku cyklu na 5 vrcholech můžeme vidět na obrázku 2.5.

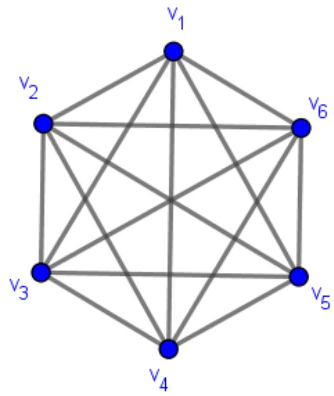


Obrázek 2.5: Cyklus na 5 vrcholech - C_5

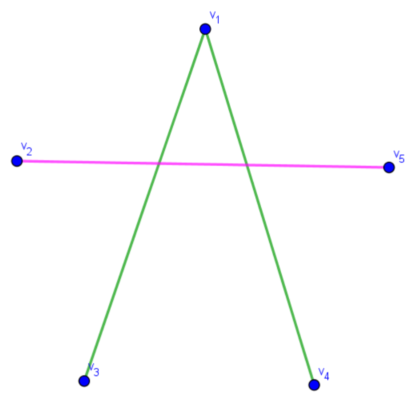
Kompletním grafem nazveme graf, kde každý vrchol je sousední se všemi ostatními vrcholy. Budeme tedy mluvit o d-pravidelném grafu, kde $d = n - 1$. Kompletní graf budeme značit K_n a příklad můžeme vidět na obrázku 2.6.

Mějme dán graf $G = (V, E)$. Řekneme, že graf $H = (V', E')$ je podgrafem grafu G, pokud $V' \subseteq V$ a zároveň $E' \subseteq E$.

Vrcholové barvení je zobrazení množiny vrcholů V grafu G do množiny barev B. Pokud budeme mluvit o vrcholovém barvení, budeme myslet dobré vrcholové barvení. Dobré vrcholové barvení grafu G je takové, že každé dva vrcholy v_i a v_j ($i, j \in \mathbb{N}$, $i = 1, 2, ..., n$ a $j = 1, 2, ..., n$), pokud jsou



Obrázek 2.6: Kompletní graf na 6 vrcholech - K_6

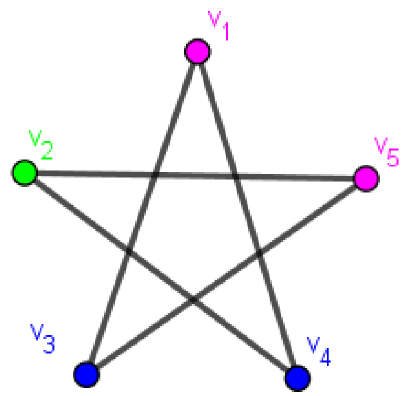


Obrázek 2.7: Nesouvislý graf se dvěma komponentami

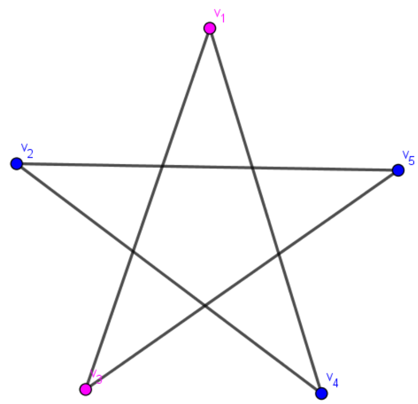
incidentní se stejnou hranou, budou obarveny různou barvou. Dobré vrcholové barvení můžeme vidět na obrázku 2.8 a vrcholové barvení, které není dobré, můžeme vidět na obrázku 2.9.

Graf, jehož vrcholová množina je sjednocením dvou neprázdných disjunktních množin U, W a množina hran E $= \{uw : u \in U \wedge w \in W\}$, se nazývá kompletní bipartitní graf a značíme jej $K_{m,n}$, kde $m = |U|$ a $n = |W|$. Bipartitní graf je zobecněním kompletního bipartitního grafu. Bipartitní graf nemusí obsahovat všechny hrany mezi partitami U a V. Bipartitní graf neobsahuje cykly liché délky a k dobrému vrcholovému barvení bipartitního grafu stačí 2 barvy. Příkladem bipartitního grafu by mohl být záznam pohybu koně po šachovnici (kůň střídá při svém pohybu bílá a černá políčka). Příklad bipartitního grafu můžeme vidět na obrázku 2.10, kde jedna partita grafu má vrcholy obarveny modře a druhá zeleně.

Vrcholovým ohodnocením grafu je zobrazení množiny vrcholů do jiné množiny, kterou může být například množina barev (získáme tak vrcholové barvení) nebo množina přirozených čísel. Pokud budeme mluvit o ohodnocení, bude tím myšleno takové vrcholové ohodnocení grafu, jenž bude bijekcí z množiny vrcholů do celočíselné množiny, která bude splňovat určité podmínky. Příkladem těchto podmínek může být, že váhy vrcholů bodou tvořit aritmetickou posloupnost, nebo budou mít



Obrázek 2.8: Dobré vrcholové barvení



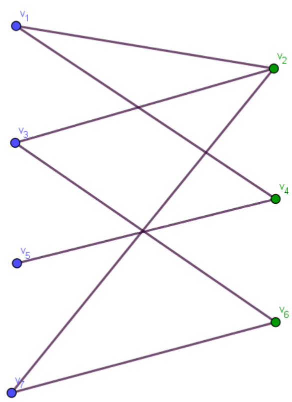
Obrázek 2.9: Vrcholové barvení, které není dobré

všechny vrcholy váhu stejnou. Příklad ohodnocení grafu K_2 můžeme vidět na obrázku 5.2.

2.1 Názvy ohodnocení

V následujících kapitolách se bavíme o konkrétních typech ohodnocení, kterým během zpracovávání práce vznikly pracovní názvy. Pracovní názvy jsem zvolila podle severských bohů, kteří jsou v jedné z příruček pro hru Dračí doupě [7].

Výhodou těchto pracovních názvů byla snadná práce s nimi, protože žádný z těchto názvů se neskloňuje. Tyto pracovní názvy provázejí celou práci od samého začátku jejího vzniku a ve chvíli, kdy přišel čas odstranit pracovní názvy, byly již tak zažité, že jsem usoudila, že není správné je měnit, přestože by například existoval výstižnější název pro tato ohodnocení grafů.



Obrázek 2.10: Bipartitní graf

Kapitola 3

Známé výsledky

Nyní se podíváme na již známá ohodnocení grafů a pro jaké třídy grafů je známá existence těchto ohodnocení. Existuje několik typů ohodnocení grafů (například hranové nebo vrcholové). Ve své práci jsem se zaměřila převážně na vrcholová ohodnocení grafů, tedy váhu vrcholu získáme sečtením hodnot vrcholů jeho sousedů.

První zmínka o ohodnocení grafů, jak se můžeme dočíst v článku Distance magic labelings of graphs [2], byla roku 1963 Sedláčkem, který definoval magické ohodnocení hran grafu $G = (V, E)$ jako bijekci f z množiny hran E na množinu $\mathbb{R}$ za předpokladu, že $f(e_i) \neq f(e_j)$ pro všechny odlišné hrany $e_i, e_j \in E$ a zároveň součet $\sum_{N_E(x)} f(e)$ je stejný pro všechny vrcholy grafu G, kde $N_E(x)$ je soubor hran incidentních s vrcholem x. Jedná se o hranové ohodnocení grafu.

V článku Distance magic labelings of graphs [2] je zmíňen článek vydaný roku 1970 s názvem Magic valuations of infinite graphs, ve kterém použili stejnou definici A. Kotzing a A. Rosa. Nejedná se o jediný článek, který z práce Sedláčka vycházel, i podle přehledu v článku [3] od J. Galliana jsou článku vycházejících z práce Sedláčka stovky.

3.1 Distančně magické ohodnocení

Aby ohodnocení grafu $G = (V, E)$ s n vrcholy bylo distančně magickým, musí existovat taková bijekce $f : V \to \{1, 2, ..., n\}$, kde $\sum_{u \in N(v)} f(u) = k$ pro všechna $v \in V$, kde $N(v)$ je množina sousedů vrcholu v a k je konstanta, jak je nadefinováno například v článku Distance Magic Graphs - A Survey [6].

Koncept je motivován strukturou magických čtverců. Roku 1994 Vilfred ve své doktorandské práci [17] představil sigma ohodnocení, stejný koncept sepsali také Millerová, Roger a Simanjuntaková [2] (1-vertex magic vertex labeling). Oba tyto výsledky jsou zmíněny v přehledovém článku [3].

V roce 2009, v článku od Sugengové, Frončka, Millerové, Ryana a Walkera, byl použit termín distančně magické ohodnocení. Později Rao, Singh a Parameswaran dokázali, že $C_m \times C_n$ mají distančně magické ohodnocení, pokud $m = n \equiv 2 \pmod 4$. Také dokázali, že $K_m \times K_n$, pro která $m \geq 2$ a $n \geq 3$, neexistuje distančně magické ohodnocení, jak se můžeme dočíst v elektronickém přehledovém článku od J. A. Galliana [3].

Vcelku zajímavé sdělení o distančně magických grafech můžeme nalézt v článku [5]. Když graf G má distančně magické ohodnocení, pak jeho doplňkem je $\overline{G}$, který má antimagické ohodnocení. Také v tomto článku můžeme najít, že pokud d-pravidelný graf G má distančně magické ohodnocení, pak d je sudé. Pro liché d neexistuje distančně magický d-pravidelný graf.

Benna vyslovil nutnou a postačující podmínku pro existenci distančně magické ohodnocení pro $K_{n,m}$. Také dokázal, že pokud G_1 a G_2 jsou souvislé grafy alespoň třemi vrcholy a minimálním stupněm 1, pak $G_1 \times G_2$ nemá distančně magické ohodnocení. O této podmínce se také zmiňuje přehledový článek od J. A. Galliana [3].

V článku Fair incomplete tournaments [1] je dokázána věta, že existuje d-pravidelný graf G se sudým počtem vrcholů n s distančně magickým ohodnocením pouze pokud $2 \leq d \leq n-2$, $d \equiv 0 \pmod 2$ a buď $n \equiv 0 \pmod 4$ nebo $n \equiv r+2 \equiv 2 \pmod 4$.

V článku [14] je dokázáno, že pokud existuje 4-pravidelný distančně magický na m vrcholech s podgrafem C_4 takovým, že součet každého páru protistraných vrcholů, které jsou v C_4, je $m+1$, pak existuje 4-pravidelný distančně magický graf na n vrcholech, pro každý graf, kde je počet vrcholů $n \geq m$ se stejnou paritou jako m. Také je v tomto článku dokázáno, že existuje distančně magické ohodnocení pro 4-pravidelné grafy s lichým počtem vrcholů n pouze pokud $n \geq 17$. V článku [14] je také dokázáno, že existují 4-pravidelné grafy s distančně magickým ohodnocením pro každou magickou konstantu $k = 2^t$ pro každé $t \geq 6$.

Článek [16] se věnuje k-pravidelným grafům, kde $k \in \{6, 8, 10, 12\}$. Pro 6-pravidelné grafy je v něm dokázáno, že pokud 6-pravidelný graf G s n vrcholy a s podgrafem $K_{4,2}$, ve kterém jsou partity $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ a $\{v_1, v_2\}$, pak pokud G umožňuje distančně magické ohodnocení f takové, že součet labelů vrcholů je $f(u_1) + f(u_2) = f(u_3) + f(u_4) = f(v_1) + f(v_2) = n+1$, pak existuje 6-pravidelný distančně magický graf řádu $n + 4t$ pro každé $t \in \mathbb{N}$. Také je v článku [16] dokázáno, že existují 6-pravidelné grafy s lichým počtem vrcholů a distančně magickým ohodnocením pouze pokud $n = 9$ nebo $n \geq 13$. Pro 8-pravidelné grafy je v článku [16] dokázáno, že pro 8-pravidelný graf G s n vrcholy a podgrafem $K_{2,2,2}$, pak pokud G umožňuje distančně magické ohodnocení f takové, že součet labelů vrcholů v každé partitě podgrafu $K_{2,2,2}$ je $n+1$, pak existuje 8-pravidelný distančně magický graf řádu $n + 4t$ pro každé $t \in \mathbb{N}$. Také je v článku dokázáno, že existují 8-pravidelné grafy s distančně magickým ohodnocením na lichém počtu vrcholů pouze pokud $n \geq 15$. V článku [16] je dokázáno, že pro 10-pravidelný graf G s n vrcholy s podgrafem $C_4[\overline{K_2}]$ pokud G umožňuje distančně magické ohodnocení takové, že součet labelů vrcholů je $n+1$ pro každý pár vrcholů odpovídajících každé $\overline{K_2}$ v kompozici $C_4[\overline{K_2}]$, pak existuje 10-pravidelný graf s $n + 4t$ vrcholy pro každé $t \in \mathbb{N}$. Také je v článku dokázaná věta pro 10-pravidelné grafy, která říká, že existuje 10-pravidelný graf na lichém počtu vrcholů n pouze pokud $n \geq 15$. Pro 12-pravidelné grafy je v článku [16] dokázaná následující lemma. Mějme 12-pravidelný graf G s n vrcholy a podgrafem H, pokud G umožňuje distančně magické ohodnocení a distančně magické ohodnocení f pro součet labelů vrcholů v každé dvojici odpovídající $\overline{K_2}$ v H je $n+1$, pak existuje 12-pravidelný graf s distančně magickým ohodnocením s $n+4t$ vrcholy pro každé $t \in \mathbb{N}$. Ve stejném článku je také dokázáno, že existuje 12-pravidelný graf s lichým počtem vrcholů n pouze pokud $n \geq 15$.

Kovář a Silber dokázali, že $(n-3)$-pravidelné distančně magický graf s n vrcholy existuje pouze tehdy, pokud $n \equiv 3 \pmod 6$ a jeho struktura je určena jednoznačně. Také poskytli jinou dostatečnou podmínku pro existenci distančně magických grafů s lichým počtem vrcholů, o čemž se také můžeme dočíst v přehledovém článku od J. A. Galliana [3].

Godinho a Singh prezentovali metodu, která vytváří z pravidelných grafů distančně magické, po té co se zabývali distančně magickými grafy a jejich rozšířeními na podobné grafy.

Z výsledků od Millerové, Rodgera a Simanjuntakové víme, že jediné stromy s distančně magickým ohodnocením jsou P_1 a P_3. Také cyklus C_n má distančně magické ohodnocení pouze pokud $n = 4$. Kompletní grafy $K_{n,n,\dots,n}$ s p partitami mají magické ohodnocení pouze pokud n je sudé, nebo n a p jsou oba současně liché. Také ukázali, že grafy, které jsou d-pravidelné, kde počet vrcholů n je liché číslo, nemá distančně magické ohodnocení a $G \times \overline{K_{2n}}$ má distančně magické ohodnocení pro libovolný pravidelný graf. Tento výsledek také můžeme nalézt zmíněn v přehledovém článku od J. A. Galliana [3].

J. A. Gallian také v přehledovém článku o ohodnocení grafů [3] zmiňuje práci Cichaczové a Nikodema, kteří dokázali pro konečné d-pravidelné grafy G, že pokud je G distančně magický graf s p-partitami a $p(t-1)$ je sudé, pak tG je také distančně magický graf.

V článku [6] je nutná podmínka existence distančně magického ohodnocení f grafu G, která říká, že distančně magické ohodnocení f grafu G je $\sum_{x \in V(G)} \deg(x) \cdot f(x) = d \cdot f(x) = kn$, kde n je počet vrcholů a k je magická konstanta. Ve stejném článku je věta říkající, že pro $m, n > 1$, kde m je počet partit kompletního m-partitního grafu na n vrcholech, má distančně magické ohodnocení právě tehdy, pokud n je sudé, nebo n a m jsou lichá čísla. Také je v článku [6] věta skládající se z dvou částí. První část říká, že pokud n je sudé nebo mpn je liché, $m \geq 1$, $n > 1$ a $p > 1$, pak $mK_{p[n]}$ má distančně magické ohodnocení. Druhá část říká, že pokud np je liché a $p \equiv 3 \pmod 4$ a m je sudé, pak $mK_{p[n]}$ nemá distančně magické ohodnocení.

V článku [8] je dokázáno, že neexistuje 14-pravidelný graf s distančně magickým ohodnocením pro lichý počet vrcholů menší než 19. Také je v článku dokázáno, že pro 14-pravidelný graf s alespoň 19 vrcholy a vrcholů má lichý počet, pak existuje graf s distančně magickým ohodnocením. V článku jsou také nalezené 14-pravidelné distančně magické grafy pro $n = 19$ a $n = 21$. Také je v článku [8] dokázaná věta, že existují 14-pravidelné distančně magické grafy pouze pokud $n = 16$ nebo $n \geq 19$ a $n \equiv 0, 1, 3 \pmod 4$.

3.2 Ohodnocení Degree distance magic

Ve své bakalářské práci [10] Martin Kovář definoval degree distance magic ohodnocení ve třetí kapitole.

Definice 1 *[10] Nechť $G = (V, E)$ je graf s n vrcholy a neobsahuje izolované vrcholy. Pak bijektivní zobrazení $f : V \to \{1, 2, ..., n\}$, pro které existuje $K \in \mathbb{Q}$ a pro každý vrchol $v \in V$ platí*

$$k = \frac{\sum_{u \in \mathbb{N}(v)} f(u)}{\deg v},$$

nazveme degree distance magic ohodnocení. Uvedený zlomek udává váhu vrcholu v.

V bakalářské práci [10] nalezl také příklady existujících grafů s degree distance magic ohodnocením. Jedním z příkladů je kompozice grafu $G[\overline{K_m}]$, kde G je graf s n vrcholy a $m \in N \backslash \{1\}$ a $m(n-1) \equiv 0 \pmod 2$, má degree distance magic ohodnocení. Dalším příkladem grafů s degree distance magic ohodnocením jsou grafy $C_n[\overline{K_m}]$, $n \in \mathbb{N}$ a $n \equiv 0 \pmod 4$, $m \in N \backslash \{1\}$ a $m \equiv 1 \pmod 2$.

V bakalářské práci [10] najdeme také souvislost vrcholového barvení a degree distance magic ohodnocení grafů. Pokud existuje 2-vrcholové barvení grafu G takové, aby pro každý vrchol $v_i \in V$ měl právě $\deg(v_i)/2$ sousedů první barvy a právě $\deg(v_i)/2$ sousedů druhé barvy a počet vrcholů obarvených jednou barvou, je stejný jako počet vrcholů obarvených barvou druhou, pak grafová kompozice $G[\overline{K_m}]$, kde $m \in N \backslash \{1\}$, má degree distance magic ohodnocení.

Martin Kovář ve své práci [10] také našel skupiny grafů, pro které neexistuje degree distance magic ohodnocení. Jedním z těchto příkladů jsou grafy s n počtem vrcholů, kde $n \equiv 2 \pmod 4$, kde každý vrchol v_i má stupeň $\deg(v_i) \equiv 1 \pmod 2$. Také neexistují grafy s degree distance magic ohodnocením, kde počet vrcholů je $n \equiv 0 \pmod 2$, kde existuje vrchol v_i, který má lichý stupeň $\deg(v_i) \equiv 1 \pmod 2$. Pro kompletní bipartitní graf $K_{m,n}$ neexistuje degree distance magic ohodnocení když m a n jsou lichá.

Martin Kovář ve své práci [10] také dal do souvislosti degree distance magic ohodnocení a distančně magické ohodnocení, kdy každý pravidelný graf s distančně magickým ohodnocením má zároveň pravidelné degree distance magické ohodnocení. Také našel skupinu grafů $K_{2,n}$, kde $n \in \mathbb{N} :$ $n \geq 5$, které mají degree distance magic ohodnocení, ale nemají distančně magické ohodnocení.

3.3 Antimagická ohodnocení

V následující části budeme mluvit o antimagických ohodnoceních. Budeme vycházet z přehledového článku Graph labeling od J. Galliana [3]. Antimagická ohodnocení byla zavedena roku 1990 Hartsfieldem a Ringelem. Graf G s q hranami nazveme antimagickým, pokud hrany můžeme ohodnotit různými čísly 1,2,...,q, bez opakování tak, že součet labelů vrcholů je různý od labelů incidentních hran. Hartsfield a Ringel dokázali také, že P_n $(n \geq 3)$, cykly, kola a K_n $(n \geq 3)$ jsou antimagické.

Jak se můžeme dočíst v článku [5] tak l-distanční antimagické ohodnocení grafů mají diferenci l.

V článku [6] najdeme větu, která říká, že pokud a, b jsou přirozená čísla taková, že $a, b > 1$, $ab > 4$ a $a \equiv b \pmod 2$, označme $n = ab$ a $d = n - a - b + 1$, pak existuje d-pravidelný distančně antimagické ohodnocení grafu G s n vrcholy.

Existuje hypotéza od Ringela a Hartsfielda, že každý graf kromě K_2 má antimagické ohodnocení. Tato hypotéza není stále dokázaná ani pro stromy.

3.3.1 Ohodnocení pro férový nekompletní turnaj

Když mluvíme o fair ohodnocení, máme na mysli ohodnocení férového nekompletního turnaje. Takové ohodnocení dle článku [5] musí splňovat dvě vlastnosti: všechny vrcholy grafu G, který má fair ohodnocení, musí být stejného stupně a posloupnost musí mít stejnou diferenci jako ohodnocení pro kompletní graf K_n. Tedy se jedná o posloupnost vah s diferencí 1 stejně jako u K_n.

O férových nekompletních turnajích známe další informace. Například z článku [1] víme, že pro d-pravidelný graf G, kde $d \equiv 2 \pmod 4$ pro sudý počet vrcholů bude $n \equiv 0 \pmod 4$. Ve stejném článku nalezneme také důsledek, který říká, že pro graf G na sudém počtu vrcholů n existuje férový nekompletní turnaj (fair ohodnocení) jen tehdy, pokud pro počet kol d (stupeň vrcholu grafu G) bude platit nerovnost $1 \leq d \leq n - 1$, $d \equiv 1 \pmod 2$ a buď $n \equiv 0 \pmod 4$ nebo $n \equiv 2 \pmod 4$.

Pokud má graf G fair ohodnocení, pak $\overline{G}$ má distančně magické ohodnocení, tato souvislost je ukázaná například v článku [14].

3.3.2 Handicapové ohodnocení

Protože není pevně zvolený český překlad pro „handicap labeling“, rozhodla jsem se pro tvar „handicapové ohodnocení“.

Handicapový nekompletní turnaj s n týmy a r koly definoval jako první Fronček, dle článku od J. Galliana [3]. Handicapový nekompletní turnaj byl definován jako turnaj, kde každý tým (označme jej například v_i) hraje s r ostatními týmy a celková síla soupeřů, se kterými i-tý tým v_i hraje, je $t - i$, kde i je label vrcholu a t je pevně zvolená konstanta. Fronček také nadefinoval vztah mezi handicapovým nekompletním turnajem a distančně antimagickým grafy a našel nové nekonečné třídy handicapových nekompletních r-pravidelných turnajů. Také spolu s Shepanikem zkonstruovali r-pravidelné handicapové distančně antimagické grafy se stupněm $n \equiv 0 \pmod 8$ pro všechny možné hodnoty r. Fronček také dokázal, že pravidelné handicapové distančně antimagické grafy s lichým stupněm vrcholů n existují, pouze pokud $n = 9$ nebo $n \geq 13$.

V článku [9] je dokázaná věta, že pro graf s $n \equiv 9 \pmod{18}$, kde n je počet vrcholů grafu, existuje 4-pravidelný handicapový graf.

Váhu vrcholu, jak můžeme nalézt v článku [15], pro d-pravidelný graf s handicapovým ohodnocením, který má n vrcholů, spočteme váhu vrcholu $w(i) = \frac{(d-1)(n+1)}{2+1}$. Ve stejném článku je věta, která říká, že neexistuje d-pravidelný graf s handicapovým ohodnocením s n vrcholy, pokud d a n jsou sudé. Také v článku [15] nalezneme větu, která říká, že neexistuje d-pravidelný graf na n vrcholech s handicapovým ohodnocením, pokud $d \equiv 1 \pmod 4$ a $n \equiv 2 \pmod 4$. Článek [15] také vylučuje existenci grafu s handicapovým ohodnocením pro netriviální d-pravidelný graf s n vrcholy, pokud $d = 1$, $d = 2$, $d = n-1$, $d = n-2t$, kde $t \in [1, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor]$. Ve stejném článku je také vyloučená existence $(n-1)$-pravidelného grafu s handicapovým ohodnocením a n vrcholy. Podle článku [15] platí, že pokud existuje 3-pravidelný graf s handicapovým ohodnocením na n vrcholech, pak existuje i 3-pravidelný graf na $n+8$ vrcholech. Podobný vztah podle stejného článku platí i pro 5-pravidelné grafy, tedy že pokud existuje 5-pravidelný graf s handicapovým ohodnocením a n vrcholy, pak existuje 5-pravidelný graf s handicapovým ohodnocením a $n+12$ vrcholy.

Existuje d-pravidelný graf s handicapovým ohodnocením pro sudý počet vrcholů n pro všechna $n \geq 28$ a $3 \leq d \leq n-11$ kromě případů, že $n \equiv 2 \pmod 4$ a $d \equiv 1 \pmod 4$, dle článku [15]. Ve stejném článku je věta, že existuje d-pravidelný graf s handicapovým ohonocením pro sudý počet vrcholů $n \equiv 0 \pmod 8$ pro všechna $n \geq 8$ a všechna lichá d splňující $3 \leq d \leq n-5$. Také v [15] najdeme větu, že existuje d-pravidelný graf s handicapovým ohodnocením pro sudý počet vrcholů n pro všechna $n \geq 12$, $n \equiv 4 \pmod 8$, a všechny lichá d splňující $7 \leq d \leq n-5$.

V článku [15] je lemma, která říká, že pokud G je $(n-7)$-pravidelný graf s handicapovým ohodnocením a n vrcholy, pak existuje $(n+16-7)$-pravidelný graf s $n+16$ vrcholy. Také v článku [15] najdeme větu, říkající že $(n-7)$-pravidelný graf s $n \equiv 2 \pmod 4$ vrcholy a s handicapovým ohodnocením existuje pouze pokud $n \geq 14$. Také je v článku [15] dokázaná věta, říkající, že d-pravidelný graf G na n vrcholech s handicapovým ohodnocením existuje, když $n \geq 8$ a $n \equiv 0 \pmod 4$ pokud $3 \leq d \leq n-5$ a d je liché, nebo $n \equiv 2 \pmod 4$ a $3 \leq d \leq n-7$ a $d \equiv 3 \pmod 4$, kromě případů, kdy $d = 3$ a možná $n \in \{10, 12, 14, 18, 22, 26\}$.

Ve své diplomové práci [13] se Matěj Krbeček zabýval upravenými handicapovými ohodnoceními, kterým chyběl v aritmetické posloupnosti labelů label a chyběla váha v aritmetické posloupnosti vah, kterou by měl vrchol s tímto chybějícím labelem. Dokázal, že takové grafy existují pouze pro sudý počet vrcholů, také přišel na vrchol, který je možné z ohodnocení i s jeho váhou odstranit. Tímto vrcholem je vrchol $\frac{n+2}{2}$. Ve své práci [13] také dokázal, že pro 2-pravidelný graf G s upraveným handicapovým ohodnocením platí, že každá komponenta G je isomorfní s C_6 a počty vrcholů se nesmí být $n \equiv 12 \pmod{24}$ a $n \equiv 18 \pmod{24}$. Také našel nekonečnou třídu grafů, pro kterou toto ohodnocení existuje, tou jsou grafy 2-pravidelné na $n \equiv 0 \pmod{24}$ vrcholech s jednoznačnou strukturou $\frac{n}{6}C_6$. Matěji Krbečkovi se také podařilo v diplomové práci [13] dokázat, že pro 2-pravidelné grafy existuje upravené handicapové ohodnocení pouze, pokud počet vrcholů je $n \equiv 0 \pmod{24}$ nebo $n \equiv 6 \pmod{24}$.

Kapitola 4

Aritmetická ohodnocení

Cílem práce bylo prozkoumat několik možných zobecnění známých přístupů. Říkejme jim „aritmetrická“ ohodnocení. Vytipovali jsme následující čtyři přístupy:

1. $w(v_i) = l + d(v_i)\varphi(v_i)$, které najdeme pod názvem Hela ohodnocení,
2. $w(v_i) = d(v_i)(l + \varphi(v_i))$, které najdeme v práci pod názvem Thor ohodnocení,
3. $w(v_i) = d(v_i)l + \varphi(v_i)$, kterí je v práci pod označení Freya ohodnocení,
4. $w(v_i) = d(v_i)(a + b\varphi(v_i))$, které se nachází v následující kapitole pod názvem Loki.

Postupně ukážeme, že některá smysl nemají a některá naopak pěkně zobecňují již známé výsledky.

4.1 Ohodnocení Hela

Mějme graf G, $G = (V, E)$, kde $V = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$. Mějme bijekci $\varphi : V \to \{1, ..., n\}$. Řekneme, že ohodnocení φ je ohodnocení Hela, jestliže pro každý vrchol $v_i \in V$ platí $w(v_i) = l + d(v_i)\varphi(v_i)$, přičemž $w(v_i) = \sum_{x\in N(v_i)} \varphi(v_i)$ a l je pevně zvolená konstanta. Když má graf Hela ohodnocení, musí být splněny náledující rovnosti.

Každý vrchol v_i přispěje $\varphi(v_i)$ do váhy všech svých $d(v_i)$ sousedů. To znamená, že součet všech vah je $\sum_{i=1}^{n} w(v_i) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{x\in\mathbb{N}(v_i)} \varphi(v_i) = \sum_{i=1}^{n} d(v_i)\varphi(v_i)$. Pro pravidelné grafy je $d(v_i)$ konstantní a tedy $d(v_i) = d$. Pak platí, že $\sum_{i=1}^{n} w(v_i) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{x\in N(v_i)} \varphi(v_i) = \sum_{i=1}^{n} d\varphi(v_i) = d\frac{n(n+1)}{2}$.

Zároveň však musí platit vztah $\sum_{i=1}^{n} w(v_i) = \sum_{i=1}^{n}(l + d\varphi(v_i)) = \sum_{i=1}^{n} l + d\sum_{i=1}^{n} \varphi(v_i) = ln + d\frac{n(n+1)}{2}$. A tak dostáváme nutnou podmínku pro existenci Hela ohodnocení.

Porovnáním těchto dvou vztahů dostaneme, že $d\frac{n(n+1)}{2} = ln + d\frac{n(n+1)}{2}$ a tedy $l = 0$, pro každé $n > 0$.

Z toho plyne, že pro pravidelné grafy mají ohodnocení Hela vztah $w(v_i) = d\varphi(v_i)$. Víme, že vrchol s labelem 1, označme si jej například x, má váhu $w(x) = d\varphi(1) = d \cdot 1 = d$. A protože součet pro $d > 0$ čísel v_i, kde každé v_i sousedí s x a $v_i > 1$, protože máme pouze jeden vrchol s labelem 1 a tím je vrchol x, nemůže být d, získáváme spor. Neexistuje d-pravidelný graf s ohodnocením Hela, kde $d \in \mathbb{N}$. Jen graf s izolovanými vrcholy má ohodnocení Hela triviálně.

4.2 Ohodnocení Thor

Mějme graf G, $G = (V, E)$, kde $V = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$. Mějme bijekci $\varphi : V \to \{1, ..., n\}$. Řekneme, že ohodnocení φ je ohodnocení Thor, jestliže pro každý vrchol $v_i \in V$ platí $w(v_i) = d(v_i)(l + \varphi(v_i))$ (můžeme si povšimnout, že Hela ohodnocení je speciálním příkladem Thor ohodnocení), přičemž $w(v_i) = \sum_{x \in N(v_i)} \varphi(v_i)$ a l je pevně zvolená konstanta. Když má graf Thor ohodnocení, musí být splněny náledující rovnosti.

Každý vrchol v_i přispěje $\varphi(v_i)$ do váhy všech svých $d(v_i)$ sousedů. To znamená, že součet všech vah je $\sum_{i=1}^{n} w(v_i) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{x \in \mathbb{N}(v_i)} \varphi(v_i) = \sum_{i=1}^{n} d(v_i)\varphi(v_i)$. Pro pravidelné grafy je $d(v_i)$ konstantní a tedy $d(v_i) = d$. Pak platí, že $\sum_{i=1}^{n} w(v_i) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{x \in N(v_i)} \varphi(v_i) = \sum_{i=1}^{n} d\varphi(v_i) = d\frac{n(n+1)}{2}$. A tak dostáváme nutnou podmínku pro Thor ohodnocení.

Zároveň však musí platit vztah $\sum_{i=1}^{n} w(v_i) = \sum_{i=1}^{n} d(l + \varphi(v_i)) = d \sum_{i=1}^{n}(l + \varphi(v_i)) = dln + d\frac{n(n+1)}{2}$.

Porovnáním těchto dvou vztahů dostaneme, že $d\frac{n(n+1)}{2} = dln + d\frac{n(n+1)}{2}$ a tedy $l = 0$, pro každé $n > 0$.

Z toho plyne, že pro pravidelné grafy mají ohodnocení Thor vztah $w(v_i) = d\varphi(v_i)$. Víme, že vrchol s labelem 1, označme si jej například x, má váhu $w(x) = d\varphi(1) = d \cdot 1 = d$. Jelikož součet d čísel v_i, kde každé v_i sousedí s x a $v_i > 1$, protože máme pouze jeden vrchol s labelem 1 a tím je vrchol x, nemůže být $d > 0$, získáváme spor. Neexistuje d-pravidelný graf, kde $d > 0$, s ohodnocením Thor. Ohodnocení Thor existuje jen triviálně pro graf bez hran.

4.3 Ohodnocení Freya

Mějme graf G, $G = (V, E)$, kde $V = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$. Mějme bijekci $\varphi : V \to \{1, ..., n\}$. Řekneme, že ohodnocení φ je ohodnocení Freya, jestliže pro každý vrchol $v_i \in V$ platí $w(v_i) = d(v_i)l + \varphi(v_i)$, přičemž $w(v_i) = \sum_{x \in N(v_i)} \varphi(v_i)$ a l je pevně zvolená konstanta. Když má graf Freya ohodnocení, musí být splněny náledující rovnosti.

Každý vrchol v_i přispěje $\varphi(v_i)$ do váhy všech svých $d(v_i)$ sousedů. To znamená, že součet všech vah je $\sum_{i=1}^{n} w(v_i) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{x \in \mathbb{N}(v_i)} \varphi(v_i) = \sum_{i=1}^{n} d(v_i)\varphi(v_i)$. Pro pravidelné grafy je $d(v_i)$ konstantní a tedy $d(v_i) = d$. Pak platí, že $\sum_{i=1}^{n} w(v_i) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{x \in N(v_i)} \varphi(v_i) = \sum_{i=1}^{n} d\varphi(v_i) = d\frac{n(n+1)}{2}$.

Zároveň však musí platit vztah $\sum_{i=1}^{n} w(v_i) = \sum_{i=1}^{n} dl + \varphi(v_i) = dln + \frac{n(n+1)}{2}$. A tímto získáváme nutnou podmínku pro ohodnocení Freya.

Porovnáním těchto dvou vztahů dostaneme, že $d\frac{n(n+1)}{2} = dln + \frac{n(n+1)}{2}$ z toho jednoduchými úpravami získáme vztah $l = \frac{(d-1)(n+1)}{2d}$, což je vztah závislosti l na d a n.

Váha vrcholu $w(v_i) \in \mathbb{Z}$ a tedy i součet $dl + \varphi(v_i)$ musí být celé číslo. Protože $\varphi(v_i) \in \mathbb{Z}$, pak dl musí být také celé číslo. To znamená, že $(d-1)(n+1)$ musí být sudé, což znamená, že právě d nebo právě n musejí být liché číslo (z principu sudosti).

Poslední podmínka nám říká, že ohodnocením Freya nemůže být ohodnocen libovolný pravidelný graf se sudým stupněm vrcholů d a sudým počtem vrcholů n.

Příklad grafu s Freya ohodnocením nalezneme v kapitole Loki na obrázku 5.4. Můžeme si všimnout, že každý graf, který má ohodnocení Freya má ohodnocení Loki, kde $a = l$ a $b = 1$, protože se jedná o speciální případ Loki ohodnocení z následující kapitoly.

Kapitola 5

Ohodnocení Loki

Další typ se ukázal jako nejzajímavější, proto se nachází v samostatné kapitole. Převážně se budeme zabývat Loki ohodnocením pro pravidelné grafy.

Mějme graf G, $G = (V, E)$, kde $V = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$. Mějme bijekci $\varphi : V \to \{1, ..., n\}$. Řekneme, že ohodnocení φ je ohodnocení Loki, jestliže pro každý vrchol $v_i \in V$ platí $w(v_i) = d(v_i)(a + b\varphi(v_i))$ (můžeme si povšimnout, že všechna předchozí ohodnocení byla speciálními příklady Loki ohodnocení), přičemž $w(v_i) = \sum_{x \in N(v_i)} \varphi(v_i)$. Když má graf Loki ohodnocení, musí být splněny náledující rovnosti.

Každý vrchol v_i přispěje $\varphi(i)$ do váhy všech svých $d(i)$ sousedů. To znamená, že součet všech vah je $\sum_{i=1}^{n} w(v_i) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{x \in \mathbb{N}(v_i)} \varphi(v_i) = \sum_{i=1}^{n} d(i)\varphi(i)$. Pro pravidelné grafy je $d(i)$ konstantní a tedy $d(i) = d$. Pak platí, že $\sum_{i=1}^{n} w(v_i) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{x \in N(v_i)} \varphi(v_i) = \sum_{i=1}^{n} d\varphi(i) = d\frac{n(n+1)}{2}$.

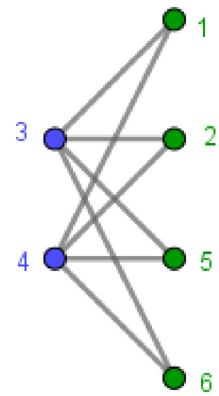
Zároveň však musí platit vztah $\sum_{i=1}^{n} w(v_i) = \sum_{i=1}^{n} d(a + b\varphi(i)) = d\sum_{i=1}^{n}(a + b\varphi(i)) = dan + db\frac{n(n+1)}{2}$. Tato nutná podmínka musí být splněná pokud se jedná o ohodnocení Loki.

Porovnáním těchto dvou vztahů získáme, že: $d\frac{n(n+1)}{2} = dan + db\frac{n(n+1)}{2}$ a tedy

$$a = (1 - b)\frac{n + 1}{2}. \tag{5.0.1}$$

Tento vztah vyjadřuje závislost a na b pro ohodnocení Loki v pravidelných grafech.

Můžeme si všimnout, že váha Loki ohodnocení pro d-pravidelné grafy odpovídá l-handicapovému ohodnocení, kde l je diference aritmetické posloupnosti vah, pokud bude $l \in \mathbb{Z}$. Je to proto, že stupeň vrcholů d je konstantní pro všechny vrcholy a a tedy váhy vrcholů, které jsou pro Loki ohodnocení definovany pro libovolný vrchol jako $w(v_i) = d(a + bi)$, budou vždy tvořit aritmetickou posloupnost. Pro nepravidelné grafy však váhy nemusí tvořit aritmetickou posloupnost a graf s Loki ohodnocením nemusí být l-handicapový. Ohodnocení Loki je obecnější. A i nepravidelný graf má smysl pro turnaj z pohledu „průměrného soupeře“, popřípadě při výběru „divácky zajímavých“ zápasů, které televize zakoupí k vysílání.



Obrázek 5.1: $K_{4,2}$ s Loki ohodnocením

Vezměme si například graf G na obrázku 5.1. Můžeme vidět že G není pravidelný graf. Ověřme, zda váhy vrcholů 1..6 odpovídají Loki ohodnocení. Nejprve si spočteme váhy jednotlivých ohodnocení a pak spočteme váhy stejných vrcholů pomocí Loki ohodnocení. Nejprve potřebujeme získat konstanty a a b.

$$w(1) = 2(a+b)$$
$$w(2) = 2(a+2b)$$

$$7 = 2(a+b)$$
$$7 = 2(a+2b)$$

$$\frac{7}{2} = a+b$$
$$\frac{7}{2} = a+2b$$

$$a = \frac{7}{2}$$
$$b = 0$$

Váha $w(1) = 7$, váha vrcholu 1 v Loki ohodnocení $w(1) = 2(\frac{7}{2}+0) = 7$, váha $w(2) = 7$, váha vrcholu 2 v Loki ohodnocení $w(2) = 2(\frac{7}{2}+0) = 7$, váha $w(3) = 14$, váha vrcholu 3 v Loki ohodnocení

$w(3) = 4(\frac{7}{2} + 0) = 14$, váha $w(4) = 14$, váha vrcholu 4 v Loki ohodnocení $w(4) = 4(\frac{7}{2} + 0) = 14$, váha $w(5) = 7$, váha vrcholu 5 v Loki ohodnocení $w(5) = 2(\frac{7}{2} + 0) = 7$ a váha $w(6) = 7$, váha vrcholu 6 v Loki ohodnocení $w(6) = 2(\frac{7}{2} + 0) = 7$. Tedy graf G má Loki ohodnocení s parametry $a = \frac{7}{2}$ a $b = 0$. Toto ohodnocení je současně degree distance magic, které ve své bakalářské práci [10] popsal Martin Kovář.

5.1 Speciální případy

Nyní se podíváme na distančně magické ohodnocení. Mějme graf G, $G = (V, E)$, kde $V = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$. Mějme bijekci $\varphi : V \to [1, ..., n]$. Řekneme, že ohodnocení φ je distančně magické ohodnocení, jestliže pro každý vrchol $v_i \in V$ platí $w(v_i) = k$, kde k je celočíselná konstanta. Každý vrchol v_i přispěje $\varphi(i)$ do váhy všech svých $d(i)$ sousedů, protože $w(v_i) = \sum_{x \in N(v_i)} \varphi(v_i)$. To znamená, že součet všech vah je $\sum_{i=1}^{n} w(v_i) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{x \in \mathbb{N}(v_i)} \varphi(v_i) = \sum_{i=1}^{n} d(i)\varphi(i)$.

Pokud si v ohodnocení Loki zvolíme $b = 0$, bude váha ohodnocení Loki pro každý vrchol v rovna konstantě. Můžeme si tedy všimnout, že distančně magické ohodnocení je speciálním případem pro ohodnocení Loki.

Ukážeme, že fair incomplete tournament (Férový nekompletní turnaj) je speciálním případem Loki ohodnocení. Mějme graf G, $G = (V, E)$, kde $V = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$. Mějme bijekci $\varphi : V \to [1, ..., n]$. Každý vrchol v_i přispěje $\varphi(i)$ do váhy všech svých $d(i)$ sousedů, protože $w(v_i) = \sum_{x \in N(v_i)} \varphi(v_i)$. To znamená, že součet všech vah je $\sum_{i=1}^{n} w(v_i) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{x \in \mathbb{N}(v_i)} \varphi(v_i) = \sum_{i=1}^{n} d(i)\varphi(i)$.

Hodnotu jednotlivých vrcholů také můžeme dostat ze vzorce $w(v_i) = \frac{(n+1)(r+1)}{2} - \varphi(v_i)$. Můžeme si všimnout, že tyto grafy jsou opět speciálním případem ohodnocení Loki pro $a = \frac{(n+1)(r+1)}{2d} \cdot l$ a $b = -\frac{1}{d}$, kde d je konstantní.

Nyní ukážeme, že handicapové grafy mají Loki ohodnocení. Mějme graf G, $G = (V, E)$, kde $V = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$. Mějme bijekci $\varphi : V \to [1, ..., n]$. Každý vrchol v_i přispěje $\varphi(i)$ do váhy všech svých $d(i)$ sousedů, protože $w(v_i) = \sum_{x \in N(v_i)} \varphi(v_i)$ stejně, jako v předchodích případech. To znamená, že součet všech vah je $\sum_{i=1}^{n} w(v_i) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{x \in \mathbb{N}(v_i)} \varphi(v_i) = \sum_{i=1}^{n} d(i)\varphi(i)$.

Hodnotu jednotlivých vrcholů také můžeme dostat ze vzorce $w(v_i) = \frac{(n+1)(r+1)}{2} + \varphi(v_i)$. Můžeme si všimnout, že handicapové grafy jsou opět speciálním případem ohodnocení Loki pro $a = \frac{(n+1)(r+1)}{2d} \cdot l$ a $b = \frac{1}{d}$, kde d je konstantní.

Nyní si ukážeme několik grafů, které Loki ohodnocení mají.

5.2 Pravidelné grafy, kde d=1

Mějme graf G, s n vrcholy, kde $n = 2$ a $d = 1$. Graf se dvěmi vrcholy a jednou hranou nazýváme K_2, tento graf můžeme vidět na obrázku 5.2. Labely vrcholů v ohodnocení Loki musí být 1 a 2. Jestliže K_2 má mít ohodnocení Loki, musí mít následující soustava rovnic řešení a zároveň musí být splněná rovnost 5.0.1.

Obrázek 5.2: K_2 s Loki ohodnocením

$w(2) = a + 2b$

$w(1) = a + b$

Dosadíme do této soustavy a tím získáme následující dvě rovnice

$1 = a + 2b$

$2 = a + b$

Tato soustava rovnic má jediné řešení, kde $a = 3$ a $b = -1$. Toto řešení je ohodnocením Loki.

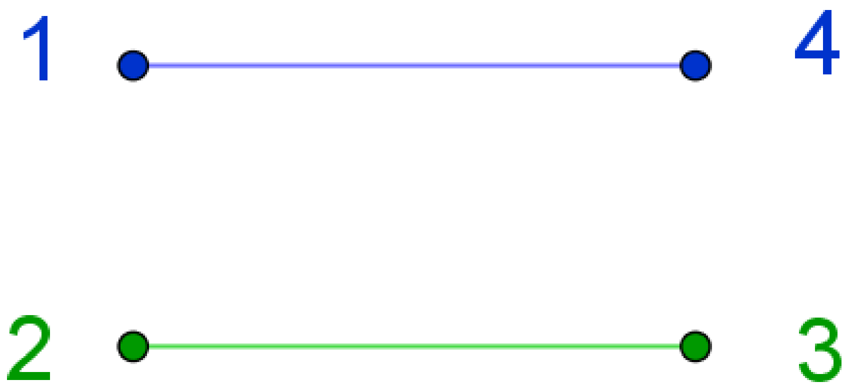
Pro lichá n nemá smysl uvažovat grafy, kde $d = 1$, protože takovéto grafy dle principu sudosti existovat nemohou.

Pro $n = 4$ a $d = 1$ existuje jediný graf, a sice dvě kopie K_2. Budeme řešit soustavu čtyř rovnic o dvou neznámých. Protože se jedná o kopie K_2, pak label jednoho vrcholu bude roven váze vrcholu druhého. Máme tedy tři možné soustavy rovnic.

1. $w(1) = 2, w(2) = 1, w(3) = 4, w(4) = 3$. Když dosadíme do vzorce $w(v_i) = a + b\varphi(v_i)$, získáme čtyři rovnice o dvou neznámých: $2 = a + b \cdot 1$, $1 = a + b \cdot 2$, $4 = a + b \cdot 3$ a $3 = a + b \cdot 4$. Tato soustava nemá řešení a zvolené ohodnocení není ohodnocením Loki.

2. $w(1) = 3, w(2) = 4, w(3) = 1, w(4) = 2$. Sestavíme soustavy rovnic pro toto ohodnocení. Získáme čtyři rovnice o dvou neznámých: $3 = a + b \cdot 1$, $1 = a + b \cdot 3$, $4 = a + b \cdot 2$ a $2 = a + b \cdot 4$. Tato soustava nemá řešení a zvolené ohodnocení není ohodnocením Loki.

3. $w(1) = 4, w(2) = 3, w(3) = 2, w(4) = 1$. Sestavíme soustavy rovnic pro toto ohodnocení. Získáme rovnice: $43 = a + b \cdot 1$, $1 = a + b \cdot 4$, $3 = a + b \cdot 2$ a $2 = a + b \cdot 3$. Tato soustava má řešení $a = 5$ a $b = -1$ a má tedy ohodnocení Loki. Tento graf je na obrázku 5.3.



Obrázek 5.3: Dvě kopie K_2 s Loki ohodnocením

Nyní ukážeme, že ohodnocení z předchozích příkladů lze zobecnit řešení pro k kopií K_2, kde $k \in \mathbb{N}$.

Věta 5.2.1 *Pro grafy, kde $d = 1$ a $n = 2 \cdot k$, kde $k \in \mathbb{N}$, existuje ohodnocení Loki se vztahem $w(v_i) = a + bi$ pro konstanty $b = -1$ a $a = n + 1$.*

Důkaz Důkaz povedeme přímo. Sestavíme graf G, který se skládá z k kopií grafu K_2, kde $k \in \mathbb{N}$, a má Loki ohodnocení. Označme vrcholy grafu G $V = \{x_1, x_2, ..., x_k, y_1, y_2, ..., y_k\}$ a hrany $E = \{x_i y_i, i = 1, 2, ..., k\}$. Můžeme si povšimnout, že G je k kopií grafu K_2.

Mějme ohodnocení φ, $\varphi : V \to [1, 2, ..., 2k]$. Definujeme $\varphi(x_i) = i$ a $\varphi(y_i) = n+1-i$. Vypočítáme váhy $w(x_i) = \varphi(y_i) = n+1-i = n+1-\varphi(x_i)$ a $w(y_i) = \varphi(x_i) = i = n+1-(n+1-i) = n+1-\varphi(y_i)$

Také si můžeme všimnout, že x má nižší labely $1, 2, ..., k$ a y má vyšší labely $k+1, k+2, ..., 2k$. Také lze vidět, že žádný z labelů není použit vícekrát, proto φ je bijekce.

Vidíme, že ohodnocení φ je ohodnocením Loki pro $b = -1$ a $a = n + 1$. ∎

Věta 5.2.2 *Pro grafy, kde $d = 1$ a $n = 2 \cdot k$, $k \in \mathbb{N}$, existuje ohodnocení Loki a takové grafy jsou určeny jednoznačně.*

Důkaz Důkaz povedeme přímo. Z věty 5.2.1 víme, že $b = -1$ a $a = n + 1$. Mějme ohodnocení φ, $\varphi : V \to [1, 2, ..., 2k]$. Definujeme $\varphi(x_i) = i$. Pak pro každé $w(x_i)$ platí, že $w(x_i) = (n+1) - \varphi(x_i)$. Z této rovnice je pro nás neznámé pouze $w(x_1)$, ostatní parametry pro každý vrchol dosadíme. Protože $\varphi(x_i) = i$, $w(x_i) = n + 1 - i$, z čehož lze vidět, pro každý vrchol x_i existuje do páru pouze jeden vrchol, například pro vrchol s labelem 1 se bude jednat o vrchol n, pro vrchol s labelem 2 to bude vrchol $n-1$ atd.

A konečně si stačí uvědomit, že pro $d=1$, $n=2k$ je struktura grafu právě k kopií K_2. ■

Můžeme si všimnout, že součet labelů všech vrcholů, které jsou incidentní s hranou, je roven $n+1$. Víme tedy nejen, že pro k kopií grafu K_2 ohodnocení Loki existuje, ale také víme, jak budou tyto grafy a jejich ohodnocení vypadat.

5.3 Pravidelné grafy, kde d=2

Grafy, pro které platí $d=2$, jsou kolekce cyklů. Nejprve se zaměříme na souvislé grafy. V této části budeme rozlišovat cykly sudé délky a cykly liché délky.

Ukážeme, že pro liché souviské cykly neexistuje ohodnocení Loki, kde $a, b \in \mathbb{Z}$.

Věta 5.3.1 *Mějme souvislý graf G, pro který platí*

- *$d(v_i) = 2$ pro každé i, kde i jsou labely vrcholů,*
- *n je liché číslo,*

pak neexistuje ohodnocení Loki grafu G, kde $w(v_i) = d(a + b\varphi(i))$.

Důkaz Mějme množinu labelů $A = \{1, 2, .., n\}$, kterými lze ohodnotit vrcholy lichého cyklu a lichý cyklus C. Označme $a_1, ..., a_n$ vrcholy grafu C.

Váha každého vrcholu $w(a_i)$ je sudá, protože $w(a_i) = 2 \cdot (a + b\varphi(a_i))$. Pro každý z vrcholů platí, že jeho sousedé mají oba lichou a nebo oba sudou hodnotu. Máme vrchol a_1, jehož soused je lichý, pak ale každý vrchol v sudé vzdálenosti od a_1 bude lichý. Protože n je liché číslo, pak vrchol a_{n-1} bude lichý. Z tohoto ale plyne, že také vrchol a_1 je lichý a všechny vrcholy v sudých vzdálenostech od vrcholu a_1 jsou liché. Tedy všechny vrcholy v grafu musejí mít liché ohodnocení. To znamená, že množina A obsahuje pouze lichá čísla a tedy získáváme spor, pokud by soused vrcholu a_1 měl sudý label, postupovali bychom analogicky. ■

Věta 5.3.2 *Mějme pravidelný ne nutně souvislý graf G s lichým počtem vrcholů n a stupněm $d=2$. Pokud Loki ohodnocení existuje, pak konstanta $b = \pm\frac{1}{2}$, nebo $b = 0$.*

Důkaz Důkaz povedeme přímo. Nejprve dokážeme, že $b = \pm\frac{1}{2}$ pokud $b \in \mathbb{Q} \wedge b \notin \mathbb{Z}$. Váha obecného vrcholu v Loki ohodnocení je $w(v_i) = 2 \cdot (a + bi)$. Ze vztahu 5.0.1 můžeme dosadit za konstantu

$a = (1-b)\frac{n+1}{2}$.

$$
\begin{aligned}
w(v_i) &= 2 \cdot \left((1-b)\frac{n+1}{2} + bi\right) \\
w(v_i) &= (1-b)(n+1) + 2bi \\
w(v_i) &= n + 1 - bn - b + 2bi \\
w(v_i) &= n + 1 + b \cdot (-n - 1 + 2i)
\end{aligned}
$$

Protože $w(v_i)$ je celé číslo a $n+1$ je celé číslo pak $b \cdot (-n-1+2i)$ je také celé číslo. Jelikož n je liché pak $-n-1+2i$ je sudé číslo pro libovolné i. Předpokládejme, že $b = \frac{p}{q}$, kde p a q jsou nesoudělná (jedná se o zlomek v základním tvaru) a $q \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$. Číslo $(-n-1+2i)$ je násobkem q. Konstanta q je sudá a aritmetická posloupnost se mění s diferencí 2, to znamená že q musí dělit libovolné sudé číslo a $q = 2$.

Nyní se zaměříme na nesouvislé grafy s lichým počtem vrcholů, kde $b \in \mathbb{Z}$. Pro souvislé grafy s lichým počtem vrcholů máme dokázáno ve větě 5.3.1, že neexistuje ohodnocení Loki pro $b \in \mathbb{Z}$.

Vyjádříme největší možnou váhu vrcholu v_1.

$$
\begin{aligned}
w(v_1) &= n + 1 + b \cdot (-n - 1 + 2) \\
n + (n-1) &\geq n + 1 + b \cdot (-n - 1 + 2) \\
2n - 1 &\geq n + 1 + b \cdot (-n - 1 + 2) \\
n - 2 &\geq b \cdot (-n + 1) \\
-\frac{n-2}{n-1} &\leq b \qquad (5.3.1)
\end{aligned}
$$

Konstanta b musí být větší než -1, pokud by byla menší, pak by nebyla splněna nerovnost 5.3.1. Podíváme se na hraniční hodnotu z druhé strany.

Vyjádříme nejmenší možnou váhu vrcholu v_1.

$$
\begin{aligned}
w(v_1) &= n + 1 + b \cdot (-n - 1 + 2) \\
2 + 3 &\leq n + 1 + b \cdot (-n - 1 + 2) \\
5 &\leq n + 1 + b \cdot (-n - 1 + 2) \\
4 - n &\leq b \cdot (-n + 1) \\
\frac{n-4}{n-1} &\geq b
\end{aligned}
$$

Konstanta b musí být jistě menší než 1. V intervalu $(-1, 1)$ existuje pouze jedno celé číslo, a tím je nula. Tímto jsme dokázali, že Loki ohodnocení pro pravidelné grafy s lichým počem vrcholů existuje pro $b = \pm\frac{1}{2}$ nebo $b = 0$ (pro $b = \frac{p}{q}$ v základním tvaru musí být $p \in \mathbb{Z}$ v intervalu $-2 < p < 2$, tedy $p \in \{-1, 0, 1\}$). Jedná se o distančně magické ohodnocení grafu pro $b = 0$, handicapové ohodnocení grafu pro $b = \frac{1}{2}$ a fair ohodnocení grafu pro $b = -\frac{1}{2}$. ■

Nyní se podívejme na sudé cykly.

Věta 5.3.3 *Mějme pravidelný ne nutně souvislý graf G se sudým počtem vrcholů n a stupněm $d = 2$. Pokud Loki ohodnocení existuje, pak konstanta $b = 0$.*

Důkaz Důkaz si rozdělíme na dvě části. První část povedeme sporem a druhou povedeme přímo. Nejprve dokážeme, že b nemůže být zlomek. Váha obecného vrcholu v Loki ohodnocení je

$$w(v_i) = 2 \cdot (a + bi).$$

Ze vztahu 5.0.1 můžeme dosadit za konstantu $a = (1 - b)\frac{n+1}{2}$.

$$\begin{aligned}
w(v_i) &= 2 \cdot \left((1 - b)\frac{n + 1}{2} + bi\right) \\
w(v_i) &= (1 - b)(n + 1) + 2bi \\
w(v_i) &= n + 1 - bn - b + 2bi \\
w(v_i) &= n + 1 + b \cdot (-n - 1 + 2i)
\end{aligned}$$

Jelikož $w(v_i)$ je celé číslo a $n + 1$ je celé číslo, pak $b \cdot (-n - 1 + 2i)$ je také celé číslo. Protože n je sudé pak $-n - 1 + 2i$ je liché číslo pro libovolné i (pokud $-n - 1 + 2i$ vezmeme pro všechna i získáme posloupnost lichých čísel). Předpokládejme, že $b = \frac{p}{q}$, kde p a q jsou nesoudělná (jedná se o zlomek v základním tvaru) a $q \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$. Číslo $(-n - 1 + 2)$ je násobkem q. Číslo $(-n - 1 + 4)$ je také násobkem q a zároveň $(-n - 1 + 4) - (-n - 1 + 2) = 2$. Konstanta q je lichá (protože liché číslo $-n - 1 + 2i$ je jejím násobkem pro každé i), takže $q > 2$, ale aritmetická posloupnost se mění s diferencí 2 a získáváme spor (jelikož je q minimalně 3 nemůže dělit všechna čísla aritmetické posloupnosti s diferencí 2). Konstanta b proto musí být celé číslo.

Váhy pro Loki ohodnocení budou buď konstantní a nebo budou tvořit rostoucí nebo klesající posloupnost čísel. Váha všech vrcholů musí být celé kladné číslo. Maximální váha kterou můžeme získat pro vrchol v_1 je $n + (n - 1)$ a minimální hodnota je $v_1 = 2 + 3$. Podívejme se na maximální váhu pro v_1.

$$\begin{aligned}
w(v_1) &= n + 1 + b \cdot (-n - 1 + 2) \\
n + (n-1) &\geq n + 1 + b \cdot (-n - 1 + 2) \\
2n - 1 &\geq n + 1 + b \cdot (-n - 1 + 2) \\
n - 2 &\geq b \cdot (-n + 1) \\
-\frac{n-2}{n-1} &\leq b
\end{aligned} \tag{5.3.2}$$

Konstanta b musí být větší než -1, pokud by byla menší pak by nebyla splněna nerovnost 5.3.2. Podíváme se na hraniční hodnotu z druhé strany.

$$\begin{aligned}
w(v_1) &= n + 1 + b \cdot (-n - 1 + 2) \\
2 + 3 &\leq n + 1 + b \cdot (-n - 1 + 2) \\
5 &\leq n + 1 + b \cdot (-n - 1 + 2) \\
4 - n &\leq b \cdot (-n + 1) \\
\frac{n-4}{n-1} &\geq b
\end{aligned}$$

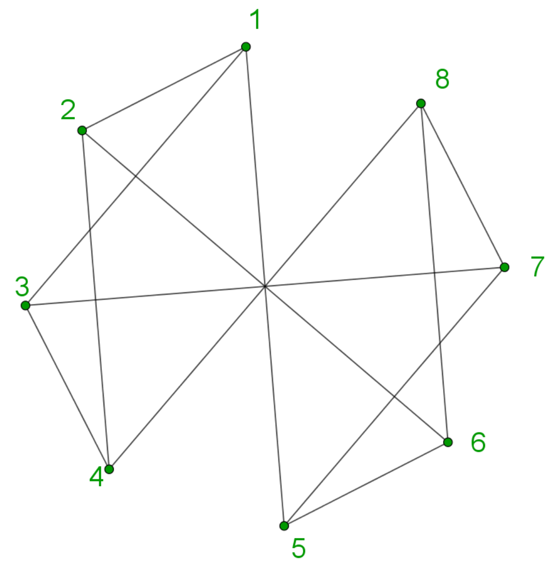
Konstanta b musí být jistě menší než 1. V intervalu $(-1, 1)$ existuje pouze jedno celé číslo a tím je nula. Tímto jsme dokázali, že jediné Loki ohodnocení pro pravidelné grafy na sudém počtu vrcholů stupně $d = 2$, které existovat může, je pro $b = 0$, což je distančně magické ohodnocení. ∎

5.4 Pravidelné grafy, kde d=3

O těchto grafech z principu sudosti víme, že mohou existovat pouze pro sudá n, která jsou minimálně 4 (pro $n = 4$ se jedná o kompletní graf, který má Loki ohodnocení).

Jako příklad grafu s ohodnocením Loki (a dokonce i Freya ohodnocením) je graf, kde $a = 3$ a $b = \frac{1}{3}$, který vidíme na obrázku 5.4. Jako další příklad jsem zvolila graf, který můžeme vidět na obrázku 5.5, kde $a = \frac{17}{3}$ a $b = \frac{1}{3}$. Oba tyto grafy nemají a a b nutně celá čísla. Obě konstanty a, b jsou však závislé na d. Můžeme si všimnout, že jak graf z obrázku 5.4, tak i z obrázku 5.5 jsou součastně grafy s handicapovým ohodnocením.

Ne všechna ohodnocení pro 3-pravidelné grafy jsou handicapová. V kapitole 5.5.1.1 jsou další příklady 3-pravidelných grafů. Obecnou konstrukci se najít nepodařilo.



Obrázek 5.4: Graf, kde $n = 8$ a $d = 3$ s Loki (Freya) ohodnocením

5.5 Možné varianty konstanty b pro pravidelné grafy

Zkusíme se na konstantu b pro Loki ohodnocení podívat obecně pro libovolné d. Minimální hodnota pro váhy $w(v_i) = \sum_{k=1}^{d} k$. A protože $d \in \mathbb{N}$ víme, že $w(v_i)$ nebude pro žádné i záporné.

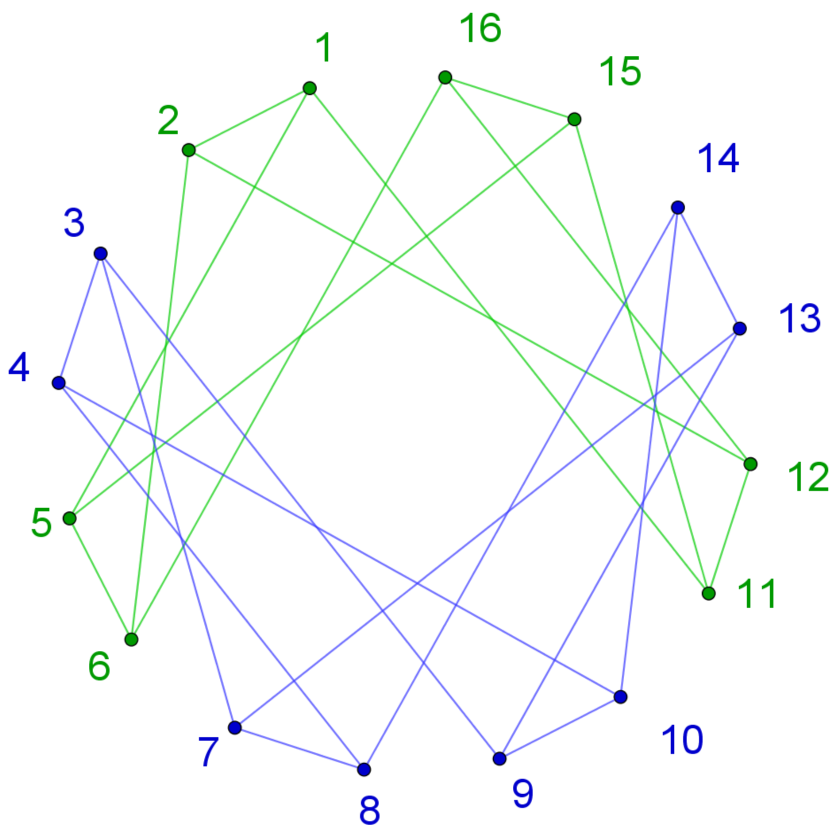
Pro některá b jsme již našli příklady výše. Nyní je zkusíme omezit v závislosti na známých proměnných pro graf, tedy pro proměnné n a d, které jsou pro každý jednotlivý graf konstantní a tedy známé.

Aby ohodnocení φ bylo Loki ohodnocení, pak musí platit vztah mezi konstantami a a b, který již známe ze začátku kapitoly o Loki ohodnocením a to $a = (1-b)\frac{n+1}{2}$. Tohoto vztahu využijeme pro vyjádření váhy vrcholu v_i s pouze jednou neznámou konstantou, a tedy

$$w(v_i) = d((1-b)\frac{n+1}{2} + b\varphi(v_i)). \tag{5.5.1}$$

Dále budeme předpokládat, že v_n je vrchol s maximálním labelem. Máme vztah pro hodnotu váhy vrcholu v_n, kterým je $w(v_n) = d((1-b)\frac{n+1}{2} + bn)$. Úpravou tohoto vztahu získáme, že hodnota váhy vrcholu v_n je $w(v_n) = \frac{d}{2}(n + 1 + b(n-1))$.

Nyní stejným způsobem odvodíme váhu vrcholu v_1, který má nejnižší label, kterým je hodnota 1. Dosazením do vztahu 5.5.1 získáme $w(v_1) = d((1-b)\frac{n+1}{2} + b)$. Jednoduchou úpravou tohoto vztahu získáme váhu vrcholu v_1 jako $w(v_1) = \frac{d}{2}(n + 1 + b(1-n))$.



Obrázek 5.5: Graf, kde $n = 16$ a $d = 3$ s Loki (Freya) ohodnocením

Nyní pro omezení konstanty b v pravidelném grafu odvodíme hodnoty, kterých může nabývat v závislosti na hodnotách největší a nejmenší váhy, které daný vrchol může nabýt.

Začneme vztahem pro vrchol v_n, kdy budeme počítat minimální váhu, které může nabýt. Jednoduchými úpravami z nerovnice $\sum_{k=1}^{d} k \leq \frac{d}{2}(n+1+b(n-1))$ získáme dolní odhad konstanty $b \geq \frac{d-n}{n-1}$ pomocí následujících úprav.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{d} k &\leq \frac{d}{2}(n+1+b(n-1)) \\
\frac{(1+d)\cdot d}{2} &\leq \frac{d}{2}(n+1+b(n-1)) \\
1+d &\leq n+1+b(n-1) \\
1+d-n-1 &\leq b(n-1) \\
d-n &\leq b(n-1) \\
\frac{d-n}{n-1} &\leq b
\end{aligned}$$

Nyní budeme počítat maximální hodnotu, které může ohodnocení v_n nabýt. Jednoduchými úpravami z nerovnice $\sum_{k=1}^{d}(n-k) \geq \frac{d}{2}(n+1+b(n-1))$ získáme horní odhad konstanty $b \geq \frac{n-2-d}{n-1}$ pomocí následujících úprav.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{d}(n-k) &\geq \frac{d}{2}(n+1+b(n-1)) \\
\frac{(n-1+n-d)\cdot d}{2} &\geq \frac{d}{2}(n+1+b(n-1)) \\
2n-1-d &\geq n+1+b(n-1) \\
n-2-d &\geq b(n-1) \\
\frac{n-2-d}{n-1} &\geq b
\end{aligned}$$

Pro kontrolu spočítáme maximální hodnotu, které může ohonocení v_1 nabýt. Jednoduchými úpravami z nerovnice $\sum_{k=1}^{d}(k+1) \leq \frac{d}{2}(n+1+b(1-n))$ získáme nerovnici $2+d-n \leq b(1-n)$ tak, že vypočteme sumu, přenásobíme 2 a vydělíme kladným d a převedeme sčítance nerovnice na druhou stranu nerovnosti. Následně vydělíme nerovnici $1-n$, které je pro $n>1$ záporné a získáme horní odhad konstanty $b \leq \frac{2+d-n}{1-n}$.

Nakonec zkontrolujeme minimální hodnotu, které může ohodnocení v_1 nabýt. Jednoduchými úpravami z nerovnice $\sum_{k=1}^{d}(n-k+1) \geq \frac{d}{2}(n+1+b(1-n))$ získáme nerovnici $n-d \geq b(1-n)$ tak, že vypočteme sumu, přenásobíme 2 a vydělíme kladným d a převedeme sčítance nerovnice na druhou stranu nerovnosti. Následně vydělíme nerovnici $1-n$, které je pro $n>1$ záporné a získáme dolní odhad konstanty $b \geq \frac{d-n}{n-1}$.

Tímto získáváme rozsah pro konstantu b v pravidelném grafu. Aby Loki ohodnocení existovalo pro daný graf, pak musí b ležet v intervalu $\langle \frac{n-d}{1-n}, \frac{2+d-n}{1-n} \rangle$, což si můžeme jednoduše upravit na přehlednější interval $\langle -1 + \frac{d-1}{n-1}, 1 - \frac{d+1}{n-1} \rangle$. Víme tedy, že b je celé číslo pouze ve dvou případech, pokud je $b = 0$ (a jedná se o výše zmíněné distančně magické ohodnocení), nebo pokud $d = 1$, pak b může nabýt hodnoty -1, což je Loki ohodnocení k-kopií K_2, kde $k \in \mathbb{N}$. Jinak bude b zlomek, jehož jmenovatel bude dělitelem stupně d.

5.5.1 Další omezení hodonoty b

Nyní se zaměřme na závislost konstanty b na stupni vrcholů d z pohledu počtu vrcholů n. Budeme rozlišovat n sudé a n liché. Předpokládejme, že graf má alespoň jednu hranu a tedy $d > 0$.

Nejprve začneme n lichým. Když n je liché číslo, pak $\frac{n+1}{2}$ je celé číslo, označme jej m. Budeme vycházet ze vzorce 5.5.1 tedy $w(v_i) = d((1-b)\frac{n+1}{2} + b\varphi(v_i))$. Máme tedy vztah $w(v_i) = d(m - bm + b\varphi(v_i))$. A protože váha $w(v_i)$ je celé číslo, pak $b \cdot d$ musí být celé číslo. To znamená, že pokud $b = \frac{p}{q}$ v základním tvaru, $p, q \in \mathbb{Z}$, pak q je dělitelem d. Také víme, že $b \in \langle \frac{n-d}{1-n}, \frac{2+d-n}{1-n} \rangle$, z čehož plyne, že $|p| \leq |q|$. Navíc $|p| = |q|$ pouze pokud $d = 1$, což pro lichá n není možné z principu sudosti.

Víme tedy, že možné hodnoty pro b, kde $b = \frac{p}{q}$ v základním tvaru jsou takové, že $|p| < |q|$ a také q je dělitelem d. Tedy množina hodnot q je konečnou množinou přirozených čísel, které jsou děliteli d a množina hodnot p, kde $p \in \{-q+1, ..., q-1\}$, je konečná množina čísel, protože $p \in \mathbb{Z}$ a tedy pro každé b existuje konečná množina racionálních čísel, kterých může nabýt. Pokud je $p = 0$, pak $b = 0$ a jedná se o distančně magické ohodnocení.

Nyní se podíváme na druhou variantu. Pokud je n sudé, pak $\frac{n+1}{2}$ není celé číslo a pro celočíselné b tedy $(1-b)$ musí být sudé a proto $b = -1$ (s příkladem těchto grafů jsme se setkali v kapitole 5.2, kde rozebíráme n kopií grafu K_2).

Pro neceločíselné b budeme zkoumat, jaké podmínky musíme splnit aby $w(v_i) = d((1-b)\frac{n+1}{2} + b\varphi(v_i))$ bylo celé číslo. Aby pro každé $i \in 1, 2, ..., n$ byla váha vrcholu $w(v_i)$ celočíselná, pak $d \cdot b \cdot \varphi(v_i)$ musí být celé číslo a zároveň $d \cdot \frac{(1-b)(n+1)}{2}$ je celé číslo.

Mějme $b = \frac{p}{q}$, kde p, q jsou nesoudělná čísla (jedná se tedy o zlomek v základním tvaru), $p \in \mathbb{Z}$ a $q \in \mathbb{N}$. Také platí, že $b \in \langle \frac{n-d}{1-n}, \frac{2+d-n}{1-n} \rangle$ a tedy $|p| < |q|$ Aby $d \cdot b \cdot \varphi(v_i)$ bylo celočíselné, pak musí platit, že q je dělitelem d.

Nyní se podíváme jaké podmínky navíc musíme splnit pro výraz $d \cdot \frac{(1-b)(n+1)}{2}$, aby byl celočíselný. Tedy potřebujeme aby $d \cdot \frac{(q-p)(n+1)}{2q}$ bylo celé číslo. Buď $2q$ je dělitelem d, nebo $(q-p)$ je sudé číslo a q je dělitelem $d(n+1)\frac{q-p}{2}$. Nebudeme brát v úvahu speciální případy, kdy $(n+1)$ je násobkem q. Pak $q - p$ z definice nemůže být násobkem q protože p je menší než q.

Díky tomuto pozorování si můžeme všimnout, že pro každý stupeň vrcholu d máme konečný počet variant hodnot b, které by mohly dát existující ohodnocení grafu.

Na první pohled se může zdát, že pokud připustíme, že $b \in \mathbb{Q}$, tedy $b = \frac{p}{q}$, kde $p, q \in \mathbb{Z}$ a $q \neq 0$ pak konstanta b na může být libovolná, protože $a + b\varphi(v_i)$ může dát celé číslo při správně zvolených konstantách a a b, což však není pravda. Tento vztah by totiž musel dát celé číslo pro všechny hodnoty $\varphi(v_i)$ současně, což není možné kromě výše uvedených případů.

Tyto vztahy platí pro dostatečně velká n, musíme totiž splnit podmínku pro konstantu b, kterou máme zmíněnou výše a tedy, že musí být z intervalu $\langle -1 + \frac{d-1}{n-1}, 1 - \frac{d+1}{n-1} \rangle$.

Lichá dostatečně velká n				
d	b	q	p	$b=\frac{p}{q}$
2	$\langle\frac{-n+2}{n-1},\frac{n-4}{n-1}\rangle$	1	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$
		2	$\pm\mathbf{1}$	$\{\frac{\pm\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\}$
4	$\langle\frac{-n+4}{n-1},\frac{n-6}{n-1}\rangle$	1	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$
		2	$\{-1,\mathbf{1}\}$	$\{\frac{-1}{2},\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\}$
		4	$\{\pm\mathbf{1},\pm3\}$	$\{\frac{\pm\mathbf{1}}{\mathbf{4}},\frac{\pm3}{4}\}$
6	$\langle\frac{-n+6}{n-1},\frac{n-8}{n-1}\rangle$	1	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$
		2	$\{\pm1\}$	$\{\frac{\pm1}{2}\}$
		3	$\{-1,\mathbf{1},\pm2\}$	$\{\frac{-1}{3},\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}},\frac{\pm2}{3}\}$
		6	$\{\pm\mathbf{1},\pm5\}$	$\{\frac{\pm\mathbf{1}}{\mathbf{6}},\frac{\pm5}{6}\}$
8	$\langle\frac{-n+8}{n-1},\frac{n-10}{n-1}\rangle$	1	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$
		2	$\{\pm1\}$	$\{\frac{\pm1}{2}\}$
		4	$\{\pm1,\pm3\}$	$\{\frac{-3}{4},\frac{-1}{4},\frac{1}{4},\frac{3}{4}\}$
		8	$\{\pm\mathbf{1},\pm3,\pm5,\pm7\}$	$\{\frac{\pm\mathbf{1}}{\mathbf{8}},\frac{\pm3}{8},\frac{\pm5}{8},\frac{\pm7}{8}\}$
10	$\langle\frac{-n+10}{n-1},\frac{n-12}{n-1}\rangle$	1	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$
		2	$\{\pm1\}$	$\{\frac{\pm1}{2}\}$
		5	$\{-1,\mathbf{1},\pm2,\pm3,\pm4\}$	$\{\frac{-1}{5},\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{5}},\frac{\pm2}{5},\frac{\pm3}{5},\frac{\pm4}{5}\}$
		10	$\{\pm\mathbf{1},\pm3,\pm7,\pm9\}$	$\{\frac{\pm\mathbf{1}}{\mathbf{10}},\frac{\pm3}{10},\frac{\pm7}{10},\frac{\pm9}{10}\}$
12	$\langle\frac{-n+12}{n-1},\frac{n-14}{n-1}\rangle$	1	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$
		2	$\{\pm1\}$	$\{\frac{\pm1}{2}\}$
		3	$\{\pm1,\pm2\}$	$\{\frac{\pm1}{3},\frac{\pm2}{3}\}$
		4	$\{\pm1,\pm3\}$	$\{\frac{\pm1}{4},\frac{\pm3}{4}\}$
		6	$\{-1,\mathbf{1},\pm5\}$	$\{\frac{-1}{6},\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{6}},\frac{\pm5}{6}\}$
		12	$\{\pm\mathbf{1},\pm5,\pm7,\pm11\}$	$\{\frac{\pm\mathbf{1}}{\mathbf{12}},\frac{\pm5}{12},\frac{\pm7}{12},\frac{\pm11}{12}\}$
14	$\langle\frac{-n+14}{n-1},\frac{n-16}{n-1}\rangle$	1	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$
		2	$\{\pm1\}$	$\{\frac{\pm1}{2}\}$
		7	$\{-1,1,\pm2,\pm3,\pm4,\pm5,\pm6\}$	$\{\frac{-1}{7},\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{7}},\frac{\pm2}{7},\frac{\pm3}{7},\frac{\pm4}{7},\frac{\pm5}{7},\frac{\pm6}{7}\}$
		14	$\{\pm\mathbf{1},\pm3,\pm5,\pm9,\pm11,\pm13\}$	$\{\frac{\pm\mathbf{1}}{\mathbf{14}},\frac{\pm3}{14},\frac{\pm5}{14},\frac{\pm9}{14},\frac{\pm11}{14},\frac{\pm13}{14}\}$
16	$\langle\frac{-n+16}{n-1},\frac{n-18}{n-1}\rangle$	1	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$
		2	$\{\pm1\}$	$\{\frac{\pm1}{2}\}$
		4	$\{\pm1,\pm3\}$	$\{\frac{\pm1}{4},\frac{\pm3}{4}\}$
		8	$\{-1,1,\pm3,\pm5,\pm7\}$	$\{\frac{-1}{8},\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{8}},\frac{\pm3}{8},\frac{\pm5}{8},\frac{\pm7}{8}\}$
		16	$\{\pm\mathbf{1},\pm3,\pm5,\pm7,\pm9,\pm11,\pm13,\pm15\}$	$\{\frac{\pm\mathbf{1}}{\mathbf{16}},\frac{\pm3}{16},\frac{\pm5}{16},\frac{\pm7}{16},\frac{\pm9}{16},\frac{\pm11}{16},\frac{\pm13}{16},\frac{\pm15}{16}\}$

V tabulce si můžeme všimnout že jsou zvýrazněny některé hodnoty tučně. Jedná se o již známá ohodnocení pro grafy. Pokud je b nulové a najdeme ohodnocení grafu, pak se jedná o distančně magické ohodnocení. Pokud je $b = \frac{1}{d}$ jedná se o handicapové ohodnocení a pokud $b = -\frac{1}{d}$ jedná se o fair ohodnocení.Pokud je $b = \frac{2}{d}$ a převedeme jej do základního tvaru jedná se o 2-handicapové ohodnocení.

Pomocí této tabulky lze také snadno vypočíst počet vrcholů n pro daný stupeň vrcholu d, kde Loki ohodnocení s danou konstantou b má smysl.

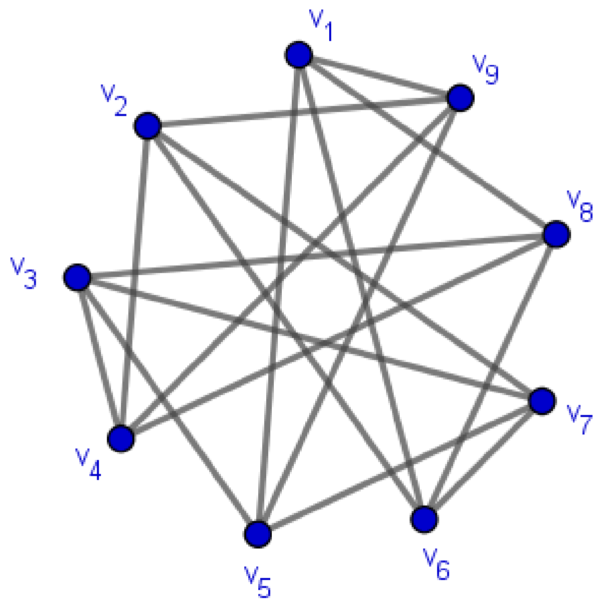
Pro sudá n si rozdělíme tabulku na více variant pro větší přehlednost

Sudá dostatečně velká n, kde d je liché				
d	b	q	p	$b = \frac{p}{q}$
3	$\langle \frac{-n+3}{n-1}, \frac{n-5}{n-1} \rangle$	3	$\pm\mathbf{1}$	$\frac{\pm\mathbf{1}}{\mathbf{3}}$
5	$\langle \frac{-n+5}{n-1}, \frac{n-7}{n-1} \rangle$	5	$\{\pm\mathbf{1}, \pm 3\}$	$\{\frac{\pm\mathbf{1}}{\mathbf{5}}, \frac{\pm 3}{5}\}$
7	$\langle \frac{-n+7}{n-1}, \frac{n-9}{n-1} \rangle$	7	$\{\pm\mathbf{1}, \pm 3, \pm 5\}$	$\{\frac{\pm\mathbf{1}}{\mathbf{7}}, \frac{\pm 3}{7}, \frac{\pm 5}{7}\}$
9	$\langle \frac{-n+9}{n-1}, \frac{n-11}{n-1} \rangle$	3	± 1	$\frac{\pm 1}{3}$
		9	$\{\pm\mathbf{1}, \pm 5, \pm 7\}$	$\{\frac{\pm\mathbf{1}}{\mathbf{9}}, \frac{\pm 5}{9}, \frac{\pm 7}{9}\}$
11	$\langle \frac{-n+11}{n-1}, \frac{n-13}{n-1} \rangle$	11	$\{\pm\mathbf{1}, \pm 3, \pm 5, \pm 7, \pm 9\}$	$\{\frac{\pm\mathbf{1}}{\mathbf{11}}, \frac{\pm 3}{11}, \frac{\pm 5}{11}, \frac{\pm 7}{11}, \frac{\pm 9}{11}\}$
13	$\langle \frac{-n+13}{n-1}, \frac{n-15}{n-1} \rangle$	13	$\{\pm\mathbf{1}, \pm 3, \pm 5, \pm 7, \pm 9, \pm 11\}$	$\{\frac{\pm\mathbf{1}}{\mathbf{13}}, \frac{\pm 3}{13}, \frac{\pm 5}{13}, \frac{\pm 7}{13}, \frac{\pm 9}{13}, \frac{\pm 11}{13}\}$
15	$\langle \frac{-n+15}{n-1}, \frac{n-17}{n-1} \rangle$	3	± 1	$\frac{\pm 1}{3}$
		5	$\{\pm 1, \pm 3\}$	$\{\frac{\pm 1}{5}, \frac{\pm 3}{5}\}$
		15	$\{\pm\mathbf{1}, \pm 7, \pm 11, \pm 13\}$	$\{\frac{\pm\mathbf{1}}{\mathbf{15}}, \frac{\pm 7}{15}, \frac{\pm 11}{15}, \frac{\pm 3}{15}\}$
17	$\langle \frac{-n+17}{n-1}, \frac{n-19}{n-1} \rangle$	17	$\{\pm\mathbf{1}, \pm 3, \pm 5, \pm 7, \pm 9, \pm 11, \pm 13, \pm 15\}$	$\{\frac{\pm\mathbf{1}}{\mathbf{17}}, \frac{\pm 3}{17}, \frac{\pm 5}{17}, \frac{\pm 7}{17}, \frac{\pm 9}{17}, \frac{\pm 11}{17}, \frac{\pm 13}{17}, \frac{\pm 15}{17}\}$
19	$\langle \frac{-n+19}{n-1}, \frac{n-21}{n-1} \rangle$	19	$\{\pm\mathbf{1}, \pm 3, \pm 5, \pm 7, \pm 9, \pm 11, \pm 13, \pm 15, \pm 17\}$	$\{\frac{\pm\mathbf{1}}{\mathbf{19}}, \frac{\pm 3}{19}, \frac{\pm 5}{19}, \frac{\pm 7}{19}, \frac{\pm 9}{19}, \frac{\pm 11}{19}, \frac{\pm 13}{19}, \frac{\pm 15}{19}, \frac{\pm 17}{19}\}$

Sudá dostatečně velká n, kde b je celočíselné				
d	b	q	p	$b = \frac{p}{q}$
1	$\langle \frac{-n+1}{n-1}, \frac{n-3}{n-1} \rangle$	1	$\mathbf{-1}$	$\mathbf{-1}$

Sudá dostatečně velká n, kde d je sudé				
d	b	q	p	$b = \frac{p}{q}$
2	$\langle \frac{-n+2}{n-1}, \frac{n-4}{n-1} \rangle$	1	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$
4	$\langle \frac{-n+4}{n-1}, \frac{n-6}{n-1} \rangle$	1	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$
		2	$\{-1, \mathbf{1}\}$	$\frac{-1}{2}, \mathbf{\frac{1}{2}}$
6	$\langle \frac{-n+6}{n-1}, \frac{n-8}{n-1} \rangle$	1	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$
		3	$\{-1, \mathbf{1}, \pm 2\}$	$\{\frac{-1}{3}, \mathbf{\frac{1}{3}}, \frac{\pm 2}{3}\}$
8	$\langle \frac{-n+8}{n-1}, \frac{n-10}{n-1} \rangle$	1	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$
		2	$\{\pm 1\}$	$\frac{\pm 1}{2}$
		4	$\{-1, \mathbf{1}, \pm 3\}$	$\{\frac{-1}{4}, \mathbf{\frac{1}{4}}, \frac{\pm 3}{4}\}$
10	$\langle \frac{-n+10}{n-1}, \frac{n-12}{n-1} \rangle$	1	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$
		5	$\{-1, \mathbf{1}, \pm 2, \pm 3, \pm 4\}$	$\{\frac{-1}{5}, \mathbf{\frac{1}{5}}, \frac{\pm 2}{5}, \frac{\pm 3}{5}, \frac{\pm 4}{5}\}$
12	$\langle \frac{-n+12}{n-1}, \frac{n-14}{n-1} \rangle$	1	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$
		2	$\{\pm 1\}$	$\frac{\pm 1}{2}$
		3	$\{\pm 1, \pm 2\}$	$\{\frac{\pm 1}{3}, \frac{\pm 2}{3}\}$
		6	$\{-1, \mathbf{1}, \pm 5\}$	$\{\frac{-1}{6}, \mathbf{\frac{1}{6}}, \frac{\pm 5}{6}\}$
14	$\langle \frac{-n+14}{n-1}, \frac{n-16}{n-1} \rangle$	1	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$
		7	$\{-1, \mathbf{1}, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 5, \pm 6\}$	$\{\frac{-1}{7}, \mathbf{\frac{1}{7}}, \frac{\pm 2}{7}, \frac{\pm 3}{7}, \frac{\pm 4}{7}, \frac{\pm 5}{7}, \frac{\pm 6}{7}\}$
16	$\langle \frac{-n+16}{n-1}, \frac{n-18}{n-1} \rangle$	1	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$
		2	$\{\pm 1\}$	$\frac{\pm 1}{2}$
		4	$\{\pm 1, \pm 3\}$	$\{\frac{\pm 1}{4}, \frac{\pm 3}{4}\}$
		8	$\{-1, \mathbf{1}, \pm 3, \pm 5, \pm 7\}$	$\{\frac{-1}{8}, \mathbf{\frac{1}{8}}, \frac{\pm 3}{8}, \frac{\pm 5}{8}, \frac{\pm 7}{8}\}$
18	$\langle \frac{-n+18}{n-1}, \frac{n-20}{n-1} \rangle$	1	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$
		3	$\{\pm 1, \pm 2\}$	$\{\frac{\pm 1}{3}, \frac{\pm 2}{3}\}$
		9	$\{-1, \mathbf{1}, \pm 2, \pm 4, \pm 5, \pm 7, \pm 8\}$	$\{\frac{-1}{9}, \mathbf{\frac{1}{9}}, \frac{\pm 2}{9}, \frac{\pm 4}{9}, \frac{\pm 5}{9}, \frac{\pm 7}{9}, \frac{\pm 8}{9}\}$
20	$\langle \frac{-n+20}{n-1}, \frac{n-22}{n-1} \rangle$	1	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$
		2	$\{\pm 1\}$	$\frac{\pm 1}{2}$
		5	$\{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4\}$	$\{\frac{\pm 1}{5}, \frac{\pm 2}{5}, \frac{\pm 3}{5}, \frac{\pm 4}{5}\}$
		10	$\{-1, \mathbf{1}, \pm 3, \pm 7, \pm 9\}$	$\{\frac{-1}{10}, \mathbf{\frac{1}{10}}, \frac{\pm 3}{10}, \frac{\pm 7}{10}, \frac{\pm 9}{10}\}$

Z tabulek získáme hodnoty pro b, pro které by bylo zajímavé pokusit se najít graf s Loki ohodnocením, které zatím známé nejsou. Konstanta b pro handicapový graf a fair graf se liší o znaménko. Jsou známy 2-handicapové grafy, což jsou takové grafy, kde se váhy jednotlivých vrcholů zvětšují o konstantu 2. Bylo by zajímavé se podívat, zda existuje příklad grafu, jehož váhy by se o dvě



Obrázek 5.6: 2-fair graf, kde $n = 9$ a $d = 4$

zmenšovaly, protože graf, kde se labely snižují s konstantou jedna, se nazývá fair, pak pro konstantu 2 by se toto ohodnocení mohlo nazývat 2-fair.

Mějme graf G, kde $n = 9$, $d = 4$ a $b = \frac{-1}{2}$. Nejprve musíme ověřit, zda pro tento graf má smysl zkoušet najít ohodnocení s takovouto hodnotou b. Víme, že $b \in \langle \frac{-9+4}{9-1}, \frac{9-6}{9-1} \rangle = \langle \frac{-5}{8}, \frac{3}{8} \rangle$ snadno vidíme, že $b = \frac{-1}{2} = \frac{-4}{8}$ je v intervalu $\langle \frac{-5}{8}, \frac{3}{8} \rangle$, můžeme tedy pokračovat v hledání Loki ohodnocení pro tento graf s konstantou $b = \frac{-1}{2}$.

Pro konstantu a pak platí, že $a = (1 - b)\frac{n+1}{2} = (1 + \frac{1}{2})\frac{9+1}{2} = \frac{3}{2} \cdot 5 = \frac{15}{2}$. Každý vrchol $w_i = 4 \cdot (\frac{15}{2} - \frac{1}{2}i) = 30 - 2i$ je celé číslo. Navíc se jeho hodnota bude zmenšovat o 2. Největší váha vrcholů bude $v_1 = 28$ a nejmenší váha vrcholů bude $w_9 = 12$. Na obrázku 5.6 můžeme vidět Loki ohodnocení se zvolenými parametry (tedy 2-fair ohodnocení pro graf s $n = 9$ a $d = 4$).

V tuto chvíli se objevuje otázka, zda existuje vztah mezi l-fair a k-handicapovým ohodnocením (k, l nám značí konstanty, o jaké se pravidelně mění váha v jednotlivých grafech).

Je známo (například v článku [14]), že doplňkem magického ohodnocení je fair ohodnocení. Zkusíme se podívat, co se bude dít s doplňky od l-fair ohodnocení.

Mějme pravidelný graf G na n vrcholech se stupněm vrcholů d_g, který má l-fair ohodnocení a vrcholy označené $v_1, v_2, ..., v_n$. Váha jednoho vrcholu grafu G je $w_i = d_g \cdot (a_q - \frac{l}{d_g} \cdot i)$. Mějme kompletní graf K_n, kde stupeň vrcholu označíme d_k s vrcholy označnými $v_1, v_2, ..., v_n$. K_n bude mít váhu vrcholu $w_i = d_k \cdot (a_k - \frac{1}{d_k} \cdot i)$.

Označme H doplněk grafu G. Pak pro každý vrchol platí, že $w_i = d_k \cdot (a_k - \frac{1}{d_k} \cdot i) - d_g \cdot (a_q - \frac{l}{d_g} \cdot i)$.

Tento vztah upravíme.

$$w_i = d_k \cdot (a_k - \frac{1}{d_k} \cdot i) - d_g \cdot (a_q - \frac{l}{d} \cdot i)$$
$$w_i = (d_k \cdot a_k - i) - (d_g \cdot a_q - l \cdot i)$$
$$w_i = d_k \cdot a_k - d_g \cdot a_q + l \cdot i - i$$
$$w_i = (d_k - d_g) \cdot (a + \frac{l-1}{d_k - d_g} \cdot i)$$
$$w_i = (d_h) \cdot (a + \frac{l-1}{d_h} \cdot i)$$

Pro vrcholy grafu H (doplňku grafu G) získáváme vztah

$$v_i = (d_h) \cdot (a + \frac{l-1}{d_h} \cdot i)$$

což pro $l = 1$ je distančně magický graf a pro $l > 1$ se jedná o $(l-1)$-handicapový graf.

Věta 5.5.1 *Mějme*

- $l \in \mathbb{N}$,
- *graf G, který je l-handicapový*

Pak $\overline{G}$ bude mít $(l+1)$-fair ohodnocení.

Důkaz Důkaz povedeme jednoduší cestou, než přes vztahy pro Loki ohodnocení, jak jsou vedeny matematické operace vedoucí k větě 5.5.1 a povedeme jej přímo.

Váha vrcholu v grafu G je

$$w_G(i) = a + l \cdot i$$

a váha vrcholu v kompletním grafu

$$w_K(i) = \binom{n+1}{2} - i.$$

Váhu vrcholu v $\overline{G}$ získáme jako rozdíl vah kompletního grafu na n vrcholech a grafu G.

$$w_{\overline{G}}(i) = w_K(i) - w_G(i) = \binom{n+1}{2} - i - (a + l \cdot i) = \binom{n+1}{2} - i - a - l \cdot i = \binom{n+1}{2} - a - (l+1) \cdot i$$

kde $\binom{n+1}{2} - a$ je konstantní a váha jednotlivých vrcholů, seřazených podle labelů od nejmenšího k největšímu, tedy $\{v_1 = 1, v_2 = 2, ..., v_n = 3\}$, se bude tvořit aritmetickou posloupnost s diferencí $(l+1)$ a jedná se tedy o $(l+1)$-fair ohodnocení. ∎

5.5.1.1 Grafy s Loki ohodnocením

Na základě tabulek z kapitoly 5.5.1 získáváme zajímavé hodnoty pro konstantu b, kterých může v grafech s Loki ohodnocením nabýt. V tabulkách jsou vyznačeny tučně hodnoty, pro něž je již nějaké ohodnocení známé. Zajímavé je tyto tabulky doplnit a pokusit se najít příklady grafů, pro něž žádné hodnoty ještě známé nejsou.

Za pomocí softwaru na hledání magických ohodnocení grafů vytvořeném doc. Kovářem se podařilo nalézt příklady grafů s k-handicapovým ohodnocením, kde $k \in \{1, 2, 3, 4\}$ pro počet vrcholů n, kde $n < 20$, na základě dat z excelovského souboru, který je přiložen v příloze.

Přiložený excelovský soubor (příloha) přehledně shrnuje omezení s omezením pro konstantu b v kapitole 5.5, kde b je z intervalu $\langle \frac{n-d}{1-n}, \frac{2+d-n}{1-n} \rangle$. V souboru se pro zadané n a d vypočte maximální a minimální hodnota b pro zvolené parametry a pro zvolené parametry b se ukáže, zda má smysl takovéto ohodnocení hledat. Na základě tabulky pak byla řada grafů nalezena, protože omezovaly možnosti pro které má smysle ohodnocení hledat a také napomáhaly nalézt společné znaky pro existenci nebo neexistenci grafů.

Pro některé kombinace počtu vrcholů a stupně grafů, je možné v konečném čase nalézt všechny kombinace, některé lze dohledat ručně, jiné je možné najít pomocí softwaru, který jednoduše zkouší možné varianty. Na základě parametrů z přiloženého souboru se pomocí softwaru doc. Kováře podařilo najít například, že pravidelných grafů, kde $n = 12$ se stupněm vrcholů $d = 5$ a handicapovým ohodnocením existuje 59. Příklad takového grafu je na obrázku 5.8.

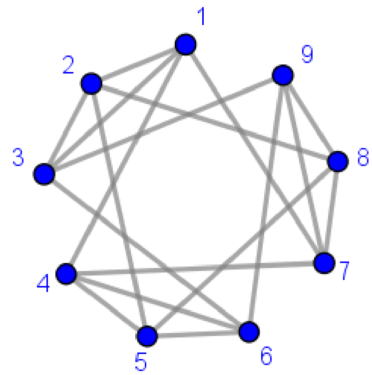
Také se podařilo najít všech 23 existujicích grafů s 12 vrcholy stupně 7, které mají handicapové ohodnocení. Příklad takového grafu je na obrázku 5.9. Pro pravidelné grafy na 13 vrcholech se podařilo najít 7 handicapových grafů, které mají stupeň vrcholu 6 a jejichž příklad je na obrázku 5.10 a 3 2-handicapové pravidelné grafy se stupněm vrcholů 6 jejichž příklad je na obrázku 5.12. Také se podařilo nalézt 6 2-handicapových grafů pro 14 vrcholů se stupněm 6, jejichž zástupce se nachází na obrázku 5.13.

Také se podařilo ukázat díky výše zmiňovanému softwaru, že pro některé hodnoty konstanty b neexistuje žádný zástupce tohoto grafu s požadovaným počtem vrcholů daného stupně. Handicapové grafy s konstantou b v odpovídajícím intervalu nemají své zastoupení například pro 7 vrcholů stupně 2, 8 vrcholů stupně 4, nebo 10 vrcholů stupně 3.

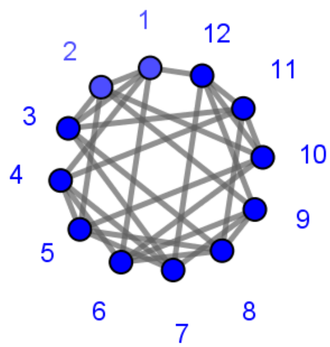
2-handicapové grafy s konstantou b v odpovídajícím intervalu neexistují například pro 12 vrcholů stupně 4, 12 vrcholů stupně 5, 13 vrcholů stupně 4, nebo 14 vrcholů stupně 9. Neexistuje ani 4-pravidelný graf s 22 vrcholy a 2-handicapovým ohodnocením.

Pro 3-handicapové grafy s konstantou b ležící v intervalu, který nevylučuje existenci grafu, neexistuje zastoupení například pro pravidelné grafy se stupněm vrcholů 5 na 16 vrcholech, se stupněm vrcholů 8 na 16 vrcholech nebo se stupněm vrcholů 9 na 16 vrcholech.

Jelikož se však s počtem vrcholů exponenciálně zvyšuje počet možných grafů, které lze sestavit (ne všechny s odpovídajícím ohodnocením), je časově náročné nalézt zástupce pro vyšší počty



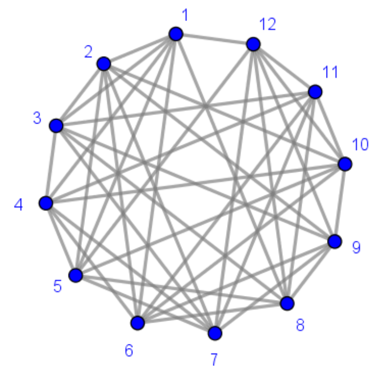
Obrázek 5.7: 1-handicapové ohodnocení grafu s 9 vrcholy stupně 4



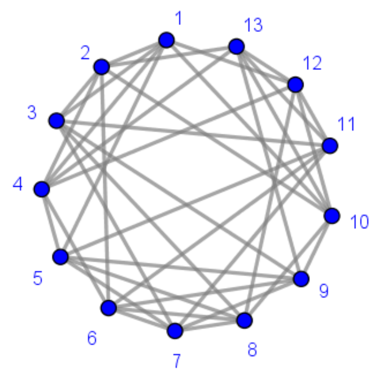
Obrázek 5.8: 1-handicapové ohodnocení grafu s 12 vrcholy stupně 5

vrcholů grafů a tedy i pro k-handicapová ohodnocení, pro konstantu k. Pro malé grafy totiž neexistují zástupci těchto k-handicapových ohodnocení a jejich nalezení je příliš časově náročné i pro výpočetní techniku. Zejména je těžké ověřit neeistenci ohodnocené pro zkoumané grafy, protože se musí ověřit všechny možné kombinace.

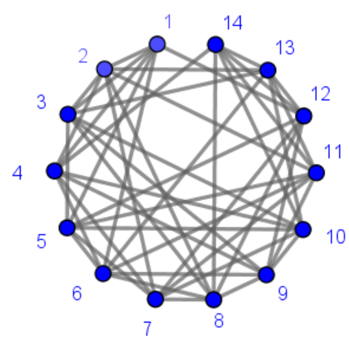
Je také rozdíl, jestli hledáme všechny takové grafy a nebo pouze jednoho zástupce. Při hledání jednoho zástupce totiž můžeme mít štěstí a nalézt jej dříve než jako poslední hledaný graf a nemusíme tedy projít všechny existují kombinace, ale jen prvních několik kombinací, než nalezneme řešení hledaného grafu. Pro rostoucí n je také větší pravděpodobnost nalezení zástupce skupiny k-handicapového ohodnocení, protože se ukazuje, že existuje větší množství grafů, jejichž vrcholy by mohly mít odpovídající váhy.



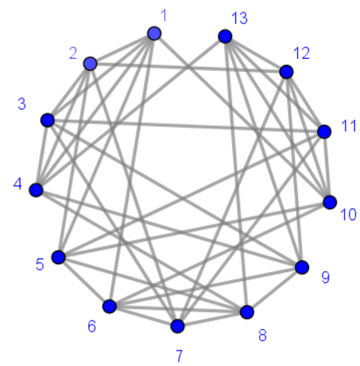
Obrázek 5.9: 1-handicapové ohodnocení grafu s 12 vrcholy stupně 7



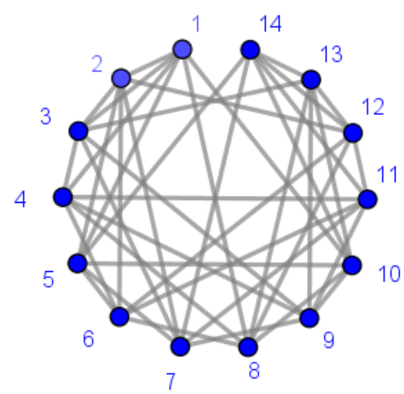
Obrázek 5.10: 1-handicapové ohodnocení grafu s 13 vrcholy stupně 6



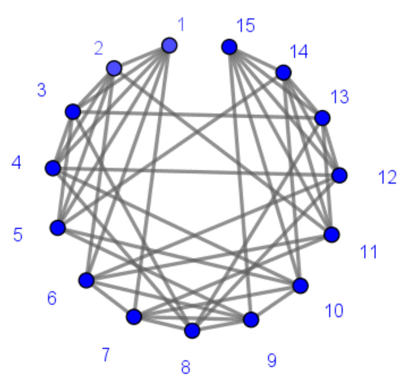
Obrázek 5.11: 1-handicapové ohodnocení grafu s 14 vrcholy stupně 7



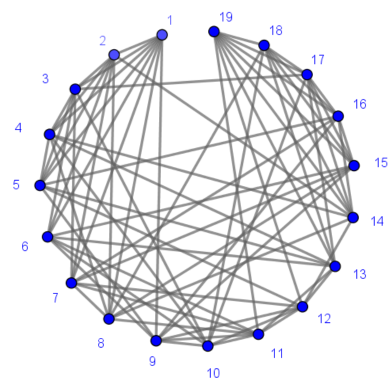
Obrázek 5.12: 2-handicapové ohodnocení grafu s 13 vrcholy stupně 6



Obrázek 5.13: 2-handicapové ohodnocení grafu s 14 vrcholy stupně 6



Obrázek 5.14: 3-handicapové ohodnocení grafu s 15 vrcholy stupně 6



Obrázek 5.15: 4-handicapové ohodnocení grafu s 19 vrcholy stupně 8

5.6 Existence grafů v závislosti na paritě parametrů

Z excelovské tabulky (příloha) zmíněné v kapitole 5.5.1.1 můžeme vypozorovat, že pro některé kombinace parametrů se nám nepodařilo nalézt konkrétní příklad. To může být důsledkem dvou možných případů. Buď příklady těchto grafů neexistují nebo jsou příliš velké na jejich nalezení v rozumném čase.

Předpokládejme, že opravdu pro některé kombinace parit je existence ohodnocení vyloučená. Mějme l-handicapové ohodnocení pravidelného grafu G na n vrcholech stupně d s konstantou b, která odpovídá konstantě b v Loki ohodnocení. Víme ze vztahu 5, že celkový součet vah všech vrcholů $\sum_{i=1}^{n} w(v_i) = d\frac{n(n+1)}{2}$.

Stejný součet bychom měli získat sečtením aritmetické posloupnosti vah v l-handicapové ohodnocení grafu G. Váha nejmenšího prvku je

$$w(1) = d(a+b)$$

a váha prvku s největším labelem se liší o $l(n-1)$. Tedy

$$w(n) = d(a+bn) = d(a+b) + l(n-1)).$$

Součet aritmetické posloupnosti vah je $\sum_{i=1}^{n} w(v_i) = n\frac{w(1)+w(n)}{2} = \frac{n}{2}(d(a+b)+d(a+b)+l(n-1)) = \frac{n}{2}(2ad+2bd+l(n-1))$. Porovnáním těchto dvou sum získáme

$$\begin{aligned} \frac{n}{2}(2ad+2bd+l(n-1)) &= d\frac{n(n+1)}{2} \\ 2ad+2bd+l(n-1) &= d(n+1) \end{aligned}$$

a zároveň víme z 5.0.1, že $a = (1-b)\frac{n+1}{2}$, a tedy

$$\begin{aligned} 2d(1-b)\frac{n+1}{2} + 2bd + l(n-1) &= d(n+1) \\ d(1-b)(n+1) + 2bd + l(n-1) &= d(n+1) \\ (d-bd)(n+1) + 2bd + l(n-1) &= d(n+1) \\ 2bd + l(n-1) &= d(n+1) - (d-bd)(n+1) \\ 2bd + l(n-1) &= bd(n+1) \\ l(n-1) &= bd(n+1-2) \\ l(n-1) &= bd(n-1) \\ l &= bd. \end{aligned} \tag{5.6.1}$$

Vztah 5.6.1 udává nutnou podmínku pro existenci Loki ohodnocení pro d-pravidelné grafy s n vrcholy.

Věta 5.6.1 *Mějme pravidelný graf G ve kterém je n vrcholů stupně d a mějme l-handicapové ohodnocení, kde váha vrcholu $w(v_i) = d((1-b)\frac{n+1}{2} + bi)$, $b \in Q$. Pak můžeme vyloučit existenci l-handicapového ohodnocení grafu G pokud:*

1. *bd je sudá konstanta a l je lichá konstanta,*

2. *l je sudá konstanta a bd je lichá konstanta,*

3. *n a d jsou liché konstanty, pro $n > 1$.*

Důkaz Důkaz povedeme přímo a budeme vycházet z rovnosti 5.6.1. Důkaz si rozdělíme na dvě části. Mějme pravidelný graf G, ve kterém je n vrcholů stupně d a mějme l-handicapové ohodnocení, kde váha vrcholu $w(v_i) = d((1-b)\frac{n+1}{2} + bi)$, $b \in Q$ a $(bd) \in N$ (což víme z kapitoly 5.5.1). Konstanta l značí diferenci aritmetické posloupnosti vah. A víme že platí vztah 5.6.1, který říká $l = bd$.

1. bd je sudá konstanta a l je lichá konstanta. Levá strana rovnosti 5.6.1 se tedy nemůže rovnat pravé straně, protože liché číslo se nerovná sudému číslu.

2. l je sudá konstanta a bd je lichá konstanta. Levá strana rovnosti 5.6.1 se tedy nemůže rovnat pravé straně, protože liché číslo se nerovná sudému číslu.

3. Neexistence grafu, který má lichý počet vrcholů lichého stupně plyne z principu sudosti, který říká, že neexistuje graf na lichém počtu vrcholů, kde je lichý součet stupňů vrcholů.

$\blacksquare$

Další nutnou podmínku existence Loki ohodnocení pro graf G uvádí následující podmínka.

Věta 5.6.2 *Mějme d-pravidelný graf G s n vrcholy a diferencí vah vrcholů l, kde:*

1. *$n \equiv 2 \pmod 4$,*

2. *$d \equiv 0 \pmod 4 \wedge l \equiv 2 \pmod 4$, nebo $d \equiv 2 \pmod 4 \wedge l, \equiv 0 \pmod 4$.*

Pak neexistuje Loki ohodnocení grafu G.

Důkaz Budeme postupovat sporem. Předpokládejme, že existuje Loki ohodnocení grafu G, který je d-pravidelný a má $n \equiv 2 \pmod 4$ vrcholů, přičemž pokud stupeň vrcholu $d \equiv 0 \pmod 4$ pak diference vah bude $l \equiv 2 \pmod 4$, nebo stupeň vrcholu $d \equiv 2 \pmod 4$ a pak diference vah bude

$l \equiv 0 \pmod 4$. Protože l je sudé, váha vrcholu nemění paritu se zmíněnou $\varphi(v_i)$. Ze vztahu 5.6.1 víme, že $l = bd$ pro Loki ohodnocení. Tedy váha libovolného vrcholu v_1 bude

$$\begin{aligned}
w(v_i) &= d(a + bi) \\
w(v_i) &= d\left(\frac{(1-b)(n+1)}{2} + bi\right) \\
w(v_i) &= d\left(\frac{(n+1)}{2} - b \cdot \frac{(n+1)}{2} + bi\right) \\
w(v_i) &= d \cdot \frac{(n+1)}{2} - bd \cdot \frac{(n+1)}{2} + bdi \\
w(v_i) &= d \cdot \frac{(n+1)}{2} - l \cdot \frac{(n+1)}{2} + li \\
w(v_i) &= (d - l) \cdot \frac{(n+1)}{2} + li. \qquad (5.6.2)
\end{aligned}$$

Paritu všech vah určuje konstanta $(d - l) \cdot \frac{(n+1)}{2}$. Víme, že $(n + 1)$ je liché, pro určení parity vah nás tedy zajímá parita $\frac{(d-l)}{2}$. Pro obě varianty druhého předpokladu věty 5.6.2 platí, že $(d - l) \equiv 2 \pmod 4$, tedy $\frac{(d-l)}{2}$ bude liché číslo. Víme tedy, že váha 5.6.2 bude lichá pro každý vrchol.

Aby váha vrcholu byla lichá, pak musí součet labelů vrcholů incidentních s v_i být lichý. Tedy v_i má lichý počet sousedů s lichým labelem. Musí tedy existovat (ne nutně pravidelný) indukovaný podgraf H na vrcholech s lichými labely (bude mít $\frac{n}{2}$ vrcholů, kterých je lichý počet, protože $n \equiv 2 \pmod 4$), kde každý vrchol bude lichého stupně musí mít lichý počet lichých sousedů. Z důsledku principu sudosti, který říká, že počet vrcholů lichého stupně v libovolném grafu je sudý, podgraf H nemůže existovat. Získáváme spor a tedy pro graf G neexistuje Loki ohodnocení. ∎

A ještě jinou nutnou podmínku se podařilo odvodit.

Věta 5.6.3 *Mějme d-pravidelný graf G s n vrcholy a diferencí vah vrcholů l, kde:*

1. $n \equiv 2 \pmod 4$,
2. *l je liché,*
3. $d \equiv l \pmod 4$.

Pak neexistuje Loki ohodnocení grafu G.

Důkaz Důkaz povedeme opět sporem. Předpokládejme, že existuje Loki ohodnocení grafu G, který je d-pravidelný a má $n \equiv 2 \pmod 4$ vrcholů, přičemž pokud stupeň vrcholu $d \equiv 0 \pmod 4$ pak diference vah bude $l \equiv 0 \pmod 4$, nebo stupeň vrcholu bude $d \equiv 2 \pmod 4$ a pak diference vah bude $l \equiv 2 \pmod 4$. Ze vztahu 5.6.1 víme, že $l = bd$ pro Loki ohodnocení. Tedy váha libovolného vrcholu v_1 bude

$$
\begin{aligned}
w(v_i) &= d(a+bi)\\
w(v_i) &= d\left(\frac{(1-b)(n+1)}{2}+bi\right)\\
w(v_i) &= d\left(\frac{(n+1)}{2}-b\cdot\frac{(n+1)}{2}+bi\right)\\
w(v_i) &= d\cdot\frac{(n+1)}{2}-bd\cdot\frac{(n+1)}{2}+bdi\\
w(v_i) &= d\cdot\frac{(n+1)}{2}-l\cdot\frac{(n+1)}{2}+li\\
w(v_i) &= (d-l)\cdot\frac{(n+1)}{2}+li. \qquad (5.6.3)
\end{aligned}
$$

Protože $(d-l)\equiv 0 \pmod 4$, je $(d-l)\cdot\frac{(n+1)}{2}$ sudá konstanta. Váha lichého vrcholu v_i je lichá, protože ve vztahu 5.6.3, který odpovídá váze libovolného vrcholu, je $(d-l)\cdot\frac{(n+1)}{2}$ sudá konstanta a li je liché číslo.

Označme vrchol s lichým labelem v_j. Aby váha vrcholu byla lichá, pak musí součet labelů vrcholů incidentních s lichým vrcholem v_j být lichý. Tedy v_j má lichý počet sousedů s lichým labelem. Musí tedy existovat (ne nutně pravidelný) indukovaný podgraf H na vrcholech s lichými labely (bude mít $\frac{n}{2}$ vrcholů, kterých je lichý počet, protože $n\equiv 2 \pmod 4$), kde každý vrchol bude lichého stupně musí mít lichý počet lichých sousedů. Z důsledku principu sudosti, který říká, že počet vrcholů lichého stupně v libovolném grafu je sudý, podgraf H nemůže existovat. Získáváme spor a tedy pro graf G neexistuje Loki ohodnocení. ∎

Kapitola 6

Turnaje a jejich souvislost s Loki ohodnocením

Z věty 5.5.1 známe vztah mezi jednotlivými ohodnoceními. Tedy, že distančně magická a k-handicapová ohodnocení grafu G mají jako doplněk graf s l-fair ohodnocením. Bylo by tedy jednoduší hledat l-fair ohodnocení grafu G a ostatní ohodnocení získat jako doplněk grafu G. Mohli bychom si v takovém případě být jistí, že ohodnocení splňují hledané parametry a v konečném důsledku bychom si ušetřili práci se zadáváním podmínek, které chceme, aby byly splněny pro hledaná ohodnocení.

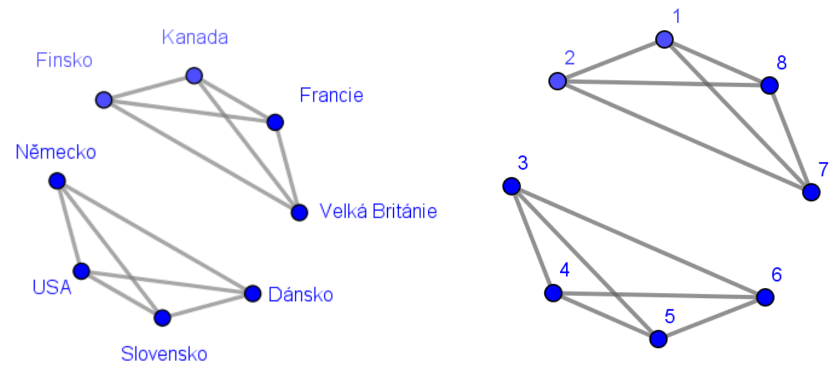
Z hlediska turnajů jsou však grafy s l-fair ohodnocením nezajímavé. Mějme graf G na n vrcholech a turnaj pro n týmů a řekněme, že počet zápasů, který týmy odehrají, je pro všechny týmy stejný. Graf G je tedy pravidelný graf stupně d a každý tým odehraje d zápasů.

Nastává otázka, jak vybrat některé zápasy, aby to bylo „spravedlivé“. K tomuto využijeme grafy s Loki ohodnocením. Jednotlivým týmům přiřadíme hodnotu podle jejich schopností. Například podle umístění v předchozím turnaji, kdy nejlepší tým bude ohodnocen číslem 1 a nejhorší číslem n.

V tuto chvíli je zřejmé, že pokud součet číslel, která jsme přiřadili soupeřům, se kterými zvolený tým hraje, a tato čísla nejsou pro všechny týmy konstantní (stejné), pak tým, jehož soupeři mají vyšší hodnotu, mají turnaj jednodušší.

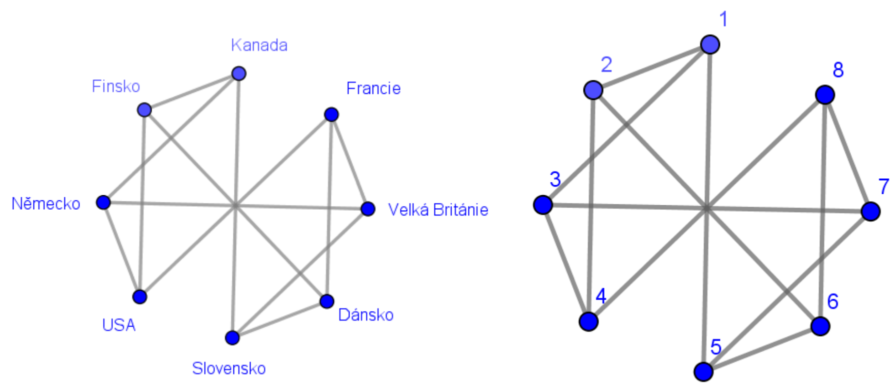
Podívejme se na hokejovou tabulku Skupiny A z mistrovství světa v ledním hokeji 2019, kde hrály týmy Kanady, Finska, Německa, USA, Slovenska, Dánska, Velké Británie a Francie (týmy jsou seřazeny podle svého umístění od nejlepšího k nejhoršímu po odehrání všech zápasů ve skupině – pořadí je z článku na wikipedii [4]). Předpokládejme, že tato skupina nastoupí v následujícím roce ve stejném složení a televize se rozhodla, že od každého státu odvysílá stejný počet zápasů, nemá však možnost odvysílat všechny zápasy, které se odehrají. Bude se tedy snažit vybrat divácky nejzajímavější zápasy.

Pokud by se rozhodla, že od každého státu odvysílá 3 zápasy, které odpovídají ohodnocení fair, pak by vysílala zápasy, které jsou znázorněny na obrázku 6.1. V takovém případě by ze zápasů,



(a) Graf s názvy týmů (b) Graf s pořadím týmů

Obrázek 6.1: Graf možných zápasů pro 8 týmů, kde každý hraje 3 zápasy s fair ohodnocením



(a) Graf s názvy týmů (b) Graf s pořadím týmů

Obrázek 6.2: Graf možných zápasů pro 8 týmů, kde každý hraje 3 zápasy s handicapovým ohodnocením

které by se odehrávaly na obou krajích tabulky (dva nejlepší týmy a dva nejhorší týmy) by byly zajímavé pouze dva zápasy.

Divácky atraktivnější je varianta, ve které by byly vybrané zápasy, které by odpovídaly handicapovému ohodnocení, který je na obrázku 6.2, anebo odpovídající distančně magickému ohodnocení, které pro zvolené parametry neexistuje. Protože jsou vyrovnanější zápasy a tedy i divácky atraktivnější.

Kapitola 7

Závěr

Motivací práce je modelování turnajů grafy s omezujícími podmínkami na vybrané zápasy. Některé turnaje mohou být časově natolik náročné, že není možné odehrát všechny zápasy. Máme tedy omezený počet zápasů, které můžeme hrát a budeme se snažit, aby turnaje byly pokud možno vyrovnané, protože takové turnaje jsou „divácky atraktivní“ a žádný z účastníků turnaje si nemůže stěžovat, že turnaj byl navržen tak, aby neměl žádnou šanci vyhrát. Pokud účastník turnaje je modelován jako vrchol grafu a zápas modelujeme hranou v takovém grafu, pak hledáme graf s vhodným ohodnocením na základě kterého zvolíme hrany mezi vrcholy tak, abychom nepřesáhli maximální počet zápasů, které můžeme hrát a zároveň, aby zápasy byly co nejvíce vyrovnané a „divácky atraktivní“.

Práce byla rozdělena do několika částí. Celou prací se prolínají vhodně zvolená aritmetická vrcholová ohodnocení grafu, kterými se práce zabývá z hlediska pravidelných grafů, které ne pro každé ze zkoumaných ohodnocení existovaly. V kapitolách 4 a 5 byla vytipována čtyři zajímavá aritmetická ohodnocení a ta pak podrobně rozebrána. Jako v každé práci, která se netýká zatím nezkoumaného tématu, bylo vhodné se podívat na již existující ohodnocení a jejich vlastnosti, kterými se zabývá kapitola 3.

Základním problémem pro výběr zápasů v turnaji pomocí ohodnocení vrcholů v grafu je, že nikdy nemůžeme dopředu seřadit účastníky turnaje naprosto jednoznačně od nejsilnějšího po nejslabšího (můžeme například vycházet z předchozích výsledků, ale ani tato metoda není vždy jistá). Účastník turnaje by si tedy mohl stěžovat, že hrál nejvíce nejtěžších zápasů a že to „není spravedlivé“. Také by nekonstantní počet zápasů škodil v počítání bodů za turnaj, protože nějaký účastník turnaje by mohl získat například 5 bodů celkově a jiný maximálně 2, což by snižovalo jeho možnost zvítězit a tedy by byl výrazně znevýhodněn oproti jiným týmům. Nebylo by to úspěšné ani z hlediska diváků, protože „fanouškovská základna“ týmů s menším počtem zápasů by byla nespokojená.

V práci se podařilo nalézt vztah mezi tzv. l-handicapovým, k-fair a distančně magickým ohodnocením a spojit je všechny pod nové aritmetické ohodnocení, o kterém mluvíme jako o Loki ohodnocení (název „Loki“ ohodnocení vznikl jako pracovní název, ale s postupem času se pro aritmetické ohodnocení zažil a jeho výhodou je, že „Loki“ je nesklonné, a tedy se s tímto názvem v textu dobře pracuje). Dále se podařilo nalézt nekonečnou třídu grafů s Loki ohodnocením, která je pro kopie K_2 grafů. Existence grafů s Loki ohodnocením jsou zcela dořešeny případy pro 1-pravidelné grafy a pro dva pravidelné grafy. Pro 3-pravidelné grafy jsou zde nalezeny existující příklady, ale není nalezená žádná nekonečná třída.

Dále se podařilo omezit konstantu b v Loki ohodnocení ($w(v_i) = d(a + bi)$, kde v_i je i-tý vrchol grafu a i je přirozený label grafu) intervalem $b \in \langle -1 + \frac{d-1}{n-1}, 1 - \frac{d+1}{n-1} \rangle$, kde d je stupeň vrcholu a n je počet vrcholů pravidelném grafu. Dále se podařilo vyřadit nekonečné třídy grafů v závislosti na paritě konstanty b v Loki ohodnocení, stupně vrcholů pravidelných grafů d a konstantě l, která značí diferenci v aritmetické posloupnosti vah. Podařilo se u ohodnocení Hela a Thor vyloučit existenci pro libovolný pravidelný graf a nalézt příklad pro Freya ohodnocení (Freya, Hela i Thor jsou pracovní názvy pro různé výpočty vah aritmetického ohodnocení).

Kromě odvození odhadů parametrů jsem také přehledně zpracovala výsledky do excelovské tabulky, která je přiložená jako příloha, a na jejim základě bylo jednoduché zjístit, která ohodnocení má cenu se pokoušet hledat. Také se pomocí tabulky podařilo odvodit a dokázat nutné podmínky existence Loki ohodnocení.

V práci je využita teorie grafů, na které stojí sestavování turnajů za pomocí grafů. Dále v práci jsou využity principy algebry, která se používá k výpočtům existence a neexistence jednotlivých ohodnocení grafů.

K samotnému zpracování byl použit již výše zmíněný program geogebra. K práci s daty při hledání jednotlivých konkrétních ohodnocení byl využit program MS excel, který je vhodný pro zpracovávání dat a po vložení vstupních parametrů, bylo snadné použít jeho funkce ke zvýraznění grafů, na které má cenu se zaměřit.

Na tuto práci by se dalo navázat hledáním Loki ohodnocení pro grafy s vyšší pravidelností a nebo i nepravidelné grafy, protože i tyto grafy by mohly mít využití. Jejich užitečnost by nebyla z hlediska turnajů, ale například z hlediska zakoupení divácky zajímavých zápasů pro vysílání v televizi. Také by bylo zajímavé nalézt další omezení pro Loki ohodnocení, kterými by se vyloučily existence dalších nekonečných tříd grafů. Zajímavé by také mohlo být zaměřit se na nearitmetická ohodnocení grafů, například jestli existuje graf s kvadratickým ohodnocením (tedy váhy vrcholů by se nezvyšovaly o konstantu, ale zvyšovaly se kvadraticky). Také by z hlediska turnajů bylo zajímavé se podívat i na jiná ohodnocení než vrcholová (například hranové barvení), která by se také dala využít z hlediska pořádání turnajů.

Literatura

[1] FRONCEK D., KOVÁŘ P., KOVÁŘOVÁ T. Fair incomplete tournaments. *Bulletin of the Institute of Combinatorics and its Applications.* **48** . (2006)

[2] MILLER M., Ch., SIMANJUNTAK R. Distance magic labelings of graphs. *Australasian journal of combinatorics* [online]. 2003, 10.Srpen 2002, **2003**(28), 305-315 [cit. 2020-10-28]. Dostupné z: https://ajc.maths.uq.edu.au/pdf/28/ajc_v28_p305.pdf

[3] GALLIAN, Joseph A. Graph Labeling. The Electronic Journal of Combinatorics [online]. 2012, 1000, 553 [cit. 2021-02-09]. ISSN 1077-8926. Dostupné z: doi:10.37236/27

[4] Mistrovství světa v ledním hokeji 2019. In: Wikipedia: the free encyclopedia [online]. San Francisco (CA): Wikimedia Foundation, 2001- [cit. 2021-03-16]. Dostupné z: https://cs.wikipedia.org/wiki/Mistrovstv%C3%AD_sv%C4%9Bta_v_ledn%C3%ADm_ hokeji_2019

[5] FRONČEK D. (2013) Handicap distance antimagic graphs and incomplete tournaments, AKCE International Journal of Graphs and Combinatorics, 10:2, 119-127, DOI:10.1080/09728600.2013.12088729

[6] FRONČEK D., S. ARUMUGAM, N. KAMATCHI. DISTANCE MAGIC GRAPHS - A SURVEY. Journal of the Indonesian Mathematical Society [online]. 2011, Year 2011(Special edition), 11-26 [cit. 2021-03-30]. Dostupné z: doi:http://dx.doi.org/10.22342/jims.0.0.15.11-26

[7] D&D Player's handbook. 13. USA: Wizards RPG Team, 2014. ISBN 978-0-7869-6560-1.

[8] KOVÁŘ P., KRBEČEK M., On 14-regular distance magic graphs, zasláno

[9] KOVÁŘ P., KRAVCENKO M., KRBECEK M., SILBER A. Handicap Labelings of 4-Regular Graphs. Advances in Electrical and Electronic Engineering [online]. 2017, 15(2), 331 - 335 [cit. 2021-03-31]. ISSN 1804-3119. Dostupné z: doi:10.15598/aeee.v15i2.2263

[10] KOVÁŘ M. Magická ohodnocení grafů a sportovní turnaje. Ostrava, 2013. Bakalářská práce. VŠB-Technická univerzita Ostrava. Vedoucí práce Mgr. Petr Kovář, Ph.D.

[11] WEST, Douglas Brent. Introduction to graph theory. 2nd ed. Upper Saddle River: Prentice Hall, c2001. ISBN 0-13-014400-2.

[12] KOVÁŘ P. Teorie Grafů. Ostrava, 2020. Skripta. VŠB-TUO.

[13] KRBEČEK M. Zobecnění magických ohodnocení a jejich využití při losování sportovních turnajů. Ostrava, 2014. Diplomová práce. VŠB - Technická univerzita Ostrava. Vedoucí práce Doc. Mgr. Petr Kovář, Ph.D.

[14] KOVÁŘP., KOVÁŘOVÁ T., FRONČEK D. A note on 4-regular distance magic graphs. AUSTRALASIAN JOURNAL OF COMBINATORICS [online]. 2012, 2012(54), 127–132 [cit. 2021-04-10]. Dostupné z: https://ajc.maths.uq.edu.au/pdf/54/ajc_v54_p127.pdf

[15] FRONČEK D., KOVÁŘ P., KOVÁŘOVÁ T., KRAJC B., KRAVČENKO M., SHEPANIK A., SILBER A. On regular handicap graphs of even order. Electronic Notes in Discrete Mathematics [online]. 2017, 60, 69-76 [cit. 2021-04-10]. ISSN 15710653. Dostupné z: doi:10.1016/j.endm.2017.06.010

[16] KOVÁŘ P., SILBER A., KABELÍKOVÁ-HRUŠKOVÁ P., KRAVČENKO M., On regular distance magic graphs of odd order, zasláno

[17] VILFRED V. $\sum$-labeled Graphs and Circulant Graphs, Ph.D., thesis University of Kerala, Trivadrum, India, (1994)

Příloha A

Excelovská tabulka

n	d	bmin	bmax	1h	2h	3h	4h	5h	6h	7h	8h
2	1	-1	-1	1	2	3	4	5	6	7	8
3	2	-0,5	-0,5	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4
4	1	-1	0,333333	1	2	3	4	5	6	7	8
4	2	-0,66667	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4
4	3	-0,33333	-0,33333	0,333333	0,666667	1	1,333333	1,666667	2	2,333333	2,666667
5	2	-0,75	0,25	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4
5	4	-0,25	-0,25	0,25	0,5	0,75	1	1,25	1,5	1,75	2
6	1	-1	0,6	1	2	3	4	5	6	7	8
6	2	-0,8	0,4	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4
6	3	-0,6	0,2	0,333333	0,666667	1	1,333333	1,666667	2	2,333333	2,666667
6	4	-0,4	0	0,25	0,5	0,75	1	1,25	1,5	1,75	2
6	5	-0,2	-0,2	0,2	0,4	0,6	0,8	1	1,2	1,4	1,6
7	2	-0,83333	0,5	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4
7	4	-0,5	0,166667	0,25	0,5	0,75	1	1,25	1,5	1,75	2
7	6	-0,16667	-0,16667	0,166667	0,333333	0,5	0,666667	0,833333	1	1,166667	1,333333
8	1	-1	0,714286	1	2	3	4	5	6	7	8
8	2	-0,85714	0,571429	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4
8	3	-0,71429	0,428571	0,333333	0,666667	1	1,333333	1,666667	2	2,333333	2,666667
8	4	-0,57143	0,285714	0,25	0,5	0,75	1	1,25	1,5	1,75	2
8	5	-0,42857	0,142857	0,2	0,4	0,6	0,8	1	1,2	1,4	1,6
8	6	-0,28571	0	0,166667	0,333333	0,5	0,666667	0,833333	1	1,166667	1,333333
8	7	-0,14286	-0,14286	0,142857	0,285714	0,428571	0,571429	0,714286	0,857143	1	1,142857
9	2	-0,875	0,625	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4
9	4	-0,625	0,375	0,25	0,5	0,75	1	1,25	1,5	1,75	2
9	6	-0,375	0,125	0,166667	0,333333	0,5	0,666667	0,833333	1	1,166667	1,333333
9	8	-0,125	-0,125	0,125	0,25	0,375	0,5	0,625	0,75	0,875	1
10	1	-1	0,777778	1	2	3	4	5	6	7	8
10	2	-0,88889	0,666667	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4
10	3	-0,77778	0,555556	0,333333	0,666667	1	1,333333	1,666667	2	2,333333	2,666667
10	4	-0,66667	0,444444	0,25	0,5	0,75	1	1,25	1,5	1,75	2
10	5	-0,55556	0,333333	0,2	0,4	0,6	0,8	1	1,2	1,4	1,6
10	6	-0,44444	0,222222	0,166667	0,333333	0,5	0,666667	0,833333	1	1,166667	1,333333
10	7	-0,33333	0,111111	0,142857	0,285714	0,428571	0,571429	0,714286	0,857143	1	1,142857
10	8	-0,22222	0	0,125	0,25	0,375	0,5	0,625	0,75	0,875	1
10	9	-0,11111	-0,11111	0,111111	0,222222	0,333333	0,444444	0,555556	0,666667	0,777778	0,888889
11	2	-0,9	0,7	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4
11	4	-0,7	0,5	0,25	0,5	0,75	1	1,25	1,5	1,75	2
11	6	-0,5	0,3	0,166667	0,333333	0,5	0,666667	0,833333	1	1,166667	1,333333
11	8	-0,3	0,1	0,125	0,25	0,375	0,5	0,625	0,75	0,875	1
11	10	-0,1	-0,1	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
12	1	-1	0,818182	1	2	3	4	5	6	7	8
12	2	-0,90909	0,727273	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4
12	3	-0,81818	0,636364	0,333333	0,666667	1	1,333333	1,666667	2	2,333333	2,666667
12	4	-0,72727	0,545455	0,25	0,5	0,75	1	1,25	1,5	1,75	2
12	5	-0,63636	0,454545	0,2	0,4	0,6	0,8	1	1,2	1,4	1,6
12	6	-0,54545	0,363636	0,166667	0,333333	0,5	0,666667	0,833333	1	1,166667	1,333333
12	7	-0,45455	0,272727	0,142857	0,285714	0,428571	0,571429	0,714286	0,857143	1	1,142857
12	8	-0,36364	0,181818	0,125	0,25	0,375	0,5	0,625	0,75	0,875	1
12	9	-0,27273	0,090909	0,111111	0,222222	0,333333	0,444444	0,555556	0,666667	0,777778	0,888889
12	10	-0,18182	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
12	11	-0,09091	-0,09091	0,090909	0,181818	0,272727	0,363636	0,454545	0,545455	0,636364	0,727273
13	2	-0,91667	0,75	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4
13	4	-0,75	0,583333	0,25	0,5	0,75	1	1,25	1,5	1,75	2
13	6	-0,58333	0,416667	0,166667	0,333333	0,5	0,666667	0,833333	1	1,166667	1,333333
13	8	-0,41667	0,25	0,125	0,25	0,375	0,5	0,625	0,75	0,875	1
13	10	-0,25	0,083333	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
13	12	-0,08333	-0,08333	0,083333	0,166667	0,25	0,333333	0,416667	0,5	0,583333	0,666667
14	1	-1	0,846154	1	2	3	4	5	6	7	8
14	2	-0,92308	0,769231	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4
14	3	-0,84615	0,692308	0,333333	0,666667	1	1,333333	1,666667	2	2,333333	2,666667
14	4	-0,76923	0,615385	0,25	0,5	0,75	1	1,25	1,5	1,75	2
14	5	-0,69231	0,538462	0,2	0,4	0,6	0,8	1	1,2	1,4	1,6
14	6	-0,61538	0,461538	0,166667	0,333333	0,5	0,666667	0,833333	1	1,166667	1,333333
14	7	-0,53846	0,384615	0,142857	0,285714	0,428571	0,571429	0,714286	0,857143	1	1,142857
14	8	-0,46154	0,307692	0,125	0,25	0,375	0,5	0,625	0,75	0,875	1
14	9	-0,38462	0,230769	0,111111	0,222222	0,333333	0,444444	0,555556	0,666667	0,777778	0,888889
14	10	-0,30769	0,153846	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8

14	11	-0,23077	0,076923	0,090909	0,181818	0,272727	0,363636	0,454545	0,545455	0,636364	0,727273
14	12	-0,15385	0	0,083333	0,166667	0,25	0,333333	0,416667	0,5	0,583333	0,666667
14	13	-0,07692	-0,07692	0,076923	0,153846	0,230769	0,307692	0,384615	0,461538	0,538462	0,615385
15	2	-0,92857	0,785714	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4
15	4	-0,78571	0,642857	0,25	0,5	0,75	1	1,25	1,5	1,75	2
15	6	-0,64286	0,5	0,166667	0,333333	0,5	0,666667	0,833333	1	1,166667	1,333333
15	8	-0,5	0,357143	0,125	0,25	0,375	0,5	0,625	0,75	0,875	1
15	10	-0,35714	0,214286	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
15	12	-0,21429	0,071429	0,083333	0,166667	0,25	0,333333	0,416667	0,5	0,583333	0,666667
15	14	-0,07143	-0,07143	0,071429	0,142857	0,214286	0,285714	0,357143	0,428571	0,5	0,571429
16	1	-1	0,866667	1	2	3	4	5	6	7	8
16	2	-0,93333	0,8	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4
16	3	-0,86667	0,733333	0,333333	0,666667	1	1,333333	1,666667	2	2,333333	2,666667
16	4	-0,8	0,666667	0,25	0,5	0,75	1	1,25	1,5	1,75	2
16	5	-0,73333	0,6	0,2	0,4	0,6	0,8	1	1,2	1,4	1,6
16	6	-0,66667	0,533333	0,166667	0,333333	0,5	0,666667	0,833333	1	1,166667	1,333333
16	7	-0,6	0,466667	0,142857	0,285714	0,428571	0,571429	0,714286	0,857143	1	1,142857
16	8	-0,53333	0,4	0,125	0,25	0,375	0,5	0,625	0,75	0,875	1
16	9	-0,46667	0,333333	0,111111	0,222222	0,333333	0,444444	0,555556	0,666667	0,777778	0,888889
16	10	-0,4	0,266667	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
16	11	-0,33333	0,2	0,090909	0,181818	0,272727	0,363636	0,454545	0,545455	0,636364	0,727273
16	12	-0,26667	0,133333	0,083333	0,166667	0,25	0,333333	0,416667	0,5	0,583333	0,666667
16	13	-0,2	0,066667	0,076923	0,153846	0,230769	0,307692	0,384615	0,461538	0,538462	0,615385
16	14	-0,13333	0	0,071429	0,142857	0,214286	0,285714	0,357143	0,428571	0,5	0,571429
16	15	-0,06667	-0,06667	0,066667	0,133333	0,2	0,266667	0,333333	0,4	0,466667	0,533333
17	2	-0,9375	0,8125	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4
17	4	-0,8125	0,6875	0,25	0,5	0,75	1	1,25	1,5	1,75	2
17	6	-0,6875	0,5625	0,166667	0,333333	0,5	0,666667	0,833333	1	1,166667	1,333333
17	8	-0,5625	0,4375	0,125	0,25	0,375	0,5	0,625	0,75	0,875	1
17	10	-0,4375	0,3125	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
17	12	-0,3125	0,1875	0,083333	0,166667	0,25	0,333333	0,416667	0,5	0,583333	0,666667
17	14	-0,1875	0,0625	0,071429	0,142857	0,214286	0,285714	0,357143	0,428571	0,5	0,571429
17	16	-0,0625	-0,0625	0,0625	0,125	0,1875	0,25	0,3125	0,375	0,4375	0,5
18	1	-1	0,882353	1	2	3	4	5	6	7	8
18	2	-0,94118	0,823529	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4
18	3	-0,88235	0,764706	0,333333	0,666667	1	1,333333	1,666667	2	2,333333	2,666667
18	4	-0,82353	0,705882	0,25	0,5	0,75	1	1,25	1,5	1,75	2
18	5	-0,76471	0,647059	0,2	0,4	0,6	0,8	1	1,2	1,4	1,6
18	6	-0,70588	0,588235	0,166667	0,333333	0,5	0,666667	0,833333	1	1,166667	1,333333
18	7	-0,64706	0,529412	0,142857	0,285714	0,428571	0,571429	0,714286	0,857143	1	1,142857
18	8	-0,58824	0,470588	0,125	0,25	0,375	0,5	0,625	0,75	0,875	1
18	9	-0,52941	0,411765	0,111111	0,222222	0,333333	0,444444	0,555556	0,666667	0,777778	0,888889
18	10	-0,47059	0,352941	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
18	11	-0,41176	0,294118	0,090909	0,181818	0,272727	0,363636	0,454545	0,545455	0,636364	0,727273
18	12	-0,35294	0,235294	0,083333	0,166667	0,25	0,333333	0,416667	0,5	0,583333	0,666667
18	13	-0,29412	0,176471	0,076923	0,153846	0,230769	0,307692	0,384615	0,461538	0,538462	0,615385
18	14	-0,23529	0,117647	0,071429	0,142857	0,214286	0,285714	0,357143	0,428571	0,5	0,571429
18	15	-0,17647	0,058824	0,066667	0,133333	0,2	0,266667	0,333333	0,4	0,466667	0,533333
18	16	-0,11765	0	0,0625	0,125	0,1875	0,25	0,3125	0,375	0,4375	0,5
18	17	-0,05882	-0,05882	0,058824	0,117647	0,176471	0,235294	0,294118	0,352941	0,411765	0,470588
19	2	-0,94444	0,833333	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4
19	4	-0,83333	0,722222	0,25	0,5	0,75	1	1,25	1,5	1,75	2
19	6	-0,72222	0,611111	0,166667	0,333333	0,5	0,666667	0,833333	1	1,166667	1,333333
19	8	-0,61111	0,5	0,125	0,25	0,375	0,5	0,625	0,75	0,875	1
19	10	-0,5	0,388889	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
19	12	-0,38889	0,277778	0,083333	0,166667	0,25	0,333333	0,416667	0,5	0,583333	0,666667
19	14	-0,27778	0,166667	0,071429	0,142857	0,214286	0,285714	0,357143	0,428571	0,5	0,571429
19	16	-0,16667	0,055556	0,0625	0,125	0,1875	0,25	0,3125	0,375	0,4375	0,5
19	18	-0,05556	-0,05556	0,055556	0,111111	0,166667	0,222222	0,277778	0,333333	0,388889	0,444444
20	1	-1	0,894737	1	2	3	4	5	6	7	8
20	2	-0,94737	0,842105	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4
20	3	-0,89474	0,789474	0,333333	0,666667	1	1,333333	1,666667	2	2,333333	2,666667
20	4	-0,84211	0,736842	0,25	0,5	0,75	1	1,25	1,5	1,75	2
20	5	-0,78947	0,684211	0,2	0,4	0,6	0,8	1	1,2	1,4	1,6
20	6	-0,73684	0,631579	0,166667	0,333333	0,5	0,666667	0,833333	1	1,166667	1,333333
20	7	-0,68421	0,578947	0,142857	0,285714	0,428571	0,571429	0,714286	0,857143	1	1,142857
20	8	-0,63158	0,526316	0,125	0,25	0,375	0,5	0,625	0,75	0,875	1
20	9	-0,57895	0,473684	0,111111	0,222222	0,333333	0,444444	0,555556	0,666667	0,777778	0,888889

20	10	-0,52632	0,421053		0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
20	11	-0,47368	0,368421		0,090909	0,181818	0,272727	0,363636	0,454545	0,545455	0,636364	0,727273
20	12	-0,42105	0,315789		0,083333	0,166667	0,25	0,333333	0,416667	0,5	0,583333	0,666667
20	13	-0,36842	0,263158		0,076923	0,153846	0,230769	0,307692	0,384615	0,461538	0,538462	0,615385
20	14	-0,31579	0,210526		0,071429	0,142857	0,214286	0,285714	0,357143	0,428571	0,5	0,571429
20	15	-0,26316	0,157895		0,066667	0,133333	0,2	0,266667	0,333333	0,4	0,466667	0,533333
20	16	-0,21053	0,105263		0,0625	0,125	0,1875	0,25	0,3125	0,375	0,4375	0,5
20	17	-0,15789	0,052632		0,058824	0,117647	0,176471	0,235294	0,294118	0,352941	0,411765	0,470588
20	18	-0,10526	0		0,055556	0,111111	0,166667	0,222222	0,277778	0,333333	0,388889	0,444444
20	19	-0,05263	-0,05263		0,052632	0,105263	0,157895	0,210526	0,263158	0,315789	0,368421	0,421053